جامعة باجي مختار–عنابة

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR -ANNABA

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

Faculté des Sciences Economiques ,Commerciales et des Sciences de Gestion

ميدان التكوين في علوم اقتصادية، علوم التسيير والعلوم التجارية

مطبوعة بيداغوجية

رياضيات المؤسسة

تمارين محلولة

المقياس: رياضيات المؤسسة

التخصص: علوم اقتصادية

المستوى: السنة الثانية

الدكتورة عويسي وردة (قسم العلوم الاقتصادية، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير ، جامعة باجي مختار عنابة)

السنة الجامعية: 2023/2022

الفهرس

مقدمة:

تعنى رياضيات المؤسسة باستخدام الطرق والأساليب العملية في اتخاذ القرارات من أجل التسيير الأمثل للموارد الاقتصادية ، فمن بين هذه الأساليب نجد التقنيات الرياضيات المتمثلة في البرمجة الخطية.

ويعتبر مقياس رياضيات المؤسسة من أهم المقاييس التي يدرسها طلاب السنة الثانية والمتخصصة في العلوم الاقتصادية، مما يمكنهم من تطوير معارفهم وتعزيز تحصيلهم الأكاديمي في هذا التخصص.

وتحوي هذه المطبوعة على مجمل المحاور المتعلقة ببرنامج مقياس رياضيات المؤسسة، من خلال التطرق الى كل المفاهيم من أجل فهمها واستيعابها بأسلوب مبسط لذى الطالب. لذا تم تقسيم المطبوعة الى 3 فصول تتجزأ الى مجموعة من الفروع كما يلي:

الفصل الاول: البرمجة الخطية.

- **صياغة المسألة.**
- **الحل البياني.**
- **عرض الحل بطريقة السمبلكس.**
- **المسألة الثنائية وتحليل الحساسية.**

الفصل الثاني: مشاكل النقل.

- **صياغة المسألة.**
- **حل مسائل النقل.**
- **تمثيل مشكلة النقل بنظرية الشبكة.**

الفصل الثالث: مدخل للبرمجة غير الخطية بقيود أو دون قيود

الفصل الأول: البرمجة الخطية

يعتبر أسلوب البرمجة الخطية أحد أساليب البرمجة الرياضية والذي يمكن استخدامه للحصول على الحلول المثلى لمشاكل البرمجة الخطية، حيث هذا الأخير عبارة عن الصياغة الرياضية للمتغيرات السائدة في المشكلة والتي تسمى بالمتغيرات القرارية، كذلك يتكون من العلاقات بين هذه المتغيرات وتسمى بالقيود الهيكلية، فضلا عن تمييز هذا النموذج بكون القيود الهيكلية قيود خطية وكذلك يتكون من دالة خطية في المتغيرات القرارية تسمى دالة الهدف [1].

1. مجالات استخدام البرمجة الخطية[2]

تستخدم البرمجة الخطية في كل المسائل الاقتصادية التي تهدف إلى البحث عن قيم المتغيرات الاقتصادية، بهدف إيجاد أمثلية الاستخدام في وجود مجموعة من القيود المالية أو التقنية أو هما معا.

1.1 **في حالة التعظيم**: تتمثل في:

- تعظيم الأرباح.
- تعظيم الإنتاج.
- تعظيم طاقات التخزين.
- تعظيم استخدام رؤوس الأموال.
- تعظيم استخدام اليد العاملة.

2.1 **في حالة التدنئة**: وتتمثل في:

- تدنئة التكاليف.
- تدنئة الخسائر.

---

[1]- عفاف علي حسن الدش، بحوث العمليات واتخاذ القرارات: الأساليب–التطبيق–أستخدم الحزم الرياضية، مكتبة عين شمس، الجزء الأول، ط2، 2012، ص.ص 45-47.

[2]- محمد راتول، بحوث العمليات، ديوان المطبوعات الجامعية، الطبعة الثانية، الجزائر، 2006، ص 16.

- تدنئة عدد الموظفين.

- تدنئة الأجور الاجمالية.

2. عناصر البرمجة الخطية[1]

أ) **دالة الهدف:** وتعبر هنا عن الهدف التي تسعى المؤسسة للوصول له كتعظيم الربح أو الإنتاج أو الإيرادات أو تدنئة التكاليف أو ساعات العمل...إلخ.

ب) **القيود:** عبارة عن مجموعة من المتراجحات أو المعادلات أو كلاهما، حيث تسعى المؤسسة من خلالها أن توجد حلا لدالة الهدف ضمن هذه الشروط.

ت) **شرط عدم السلبية:** وتعني أن جميع المتغيرات أكبر أو تساوي الصفر أي يجب أن تكون موجبة أو معدومة كونها تتعلق بكميات مادية ولا يمكن أن تساوي قيم سالبة.

المحور الأول: صياغة المسألة[2]

1. حالة التعظيم

$$\text{Max} : Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \ldots\ldots + c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \ldots\ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \ldots\ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \ldots\ldots + a_{3n}x_n \leq b_3 \\ \ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 \ldots\ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_1 , x_2 , x_3, x_n \geq 0 \end{cases}$$

[1]- أحمد حاتم عبد الله، بحوث العمليات، الجامعة الافتراضية السورية، سوريا، 2018، ص 7.

[2]- محمد راتول، مرجع سابق ذكره، ص.ص 10-13.

حيث: Max تعني تعظيم أي جعل الدالة Z في أعظم قيمة لها.

- x_1 , x_2 , x_3, x_n : هي متغيرات البرنامج والمطلوب البحث عن قيمتها ويشترط أن تكون غير سالبة.
- c_1 , c_2 , c_3, c_n : معاملات الدالة المراد تعظيمها شريطة احترام القيود وتسمى بدالة الهدف.
- a_1 , a_2 , a_3, a_n : معاملات القيود.

2- حالة التدنئة

$$Min : Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \ldots\ldots + c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \ldots\ldots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \ldots\ldots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \ldots\ldots + a_{3n}x_n \geq b_3 \\ \ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 \ldots\ldots + a_{mn}x_n \geq b_m \\ x_1 , x_2 , x_3, x_n \geq 0 \end{cases}$$

حيث: Min تعني تدنئة أي تدنئة الدالة Z تحت مجموعة من القيود.

التمرين رقم 1

احدى الشركات الصناعية تقوم بإنتاج ثلاثة أنواع من المنتجات 1،2،3 ، حيث ترغب في تحديد عدد الوحدات التي يجب إنتاجها يوميا من كل منتج بحيث تحصل على أكبر ربح ممكن، إذ يتطلب إنتاج الوحدة الواحدة من كل منتج المرور على ثلاثة عمليات إنتاجية ، والجدول التالي يبين الزمن المطلوب للوحدة الواحدة لكل منتج من العمليات المختلفة والربح المحقق[1].

[1]- دلال صادق الجواد، حميد ناصر الفتال، بحوث العمليات، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، الأردن، 2008، ص.ص 25-27.

الزمن المتاح للتشغيل (دقيقة/ يوميا)	الزمن المطلوب لكل وحدة منتجة من المنتجات الثلاثة في كل عملية إنتاجية			العملية
	منتج 3	منتج 2	منتج 1	
420	3	2	2	العملية 1
440	4	0	5	العملية 2
465	0	6	3	العملية 3
	7	4	5	ربح الوحدة الواحدة

المطلوب: صياغة نموذج البرمجة الخطية الذي يحقق أعلى ربح ممكن

الحل

نفرض أن عدد الوحدات التي سيتم إنتاجها من منتج 1 هي x_1

نفرض أن عدد الوحدات التي سيتم إنتاجها من منتج 2 هي x_2

نفرض أن عدد الوحدات التي سيتم إنتاجها من منتج 3 هي x_3

أولا: تكوين القيود

القيد العملية 1 : إن أقصى زمن متاح للعملية الأولى 420 دقيقة يوميا ، حيث أن الوحدة الواحدة من المنتج 1 يحتاج تصنيعها في العملية الأولى 2 دقيقة، والمنتج 2 يحتاج 2 دقيقة، والمنتج 3 يحتاج 3 دقائق . وبالتالي يمكن صياغة القيد الأول كما يلي:

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 420$$

القيد العملية 2: إن أقصى زمن متاح للعملية الثانية 440 دقيقة يوميا ، حيث أن الوحدة الواحدة من المنتج 1 يحتاج تصنيعها في العملية الثانية 5 دقائق، والمنتج 2 لا يتطلب العملية الإنتاجية الثانية، بينما المنتج 3 يحتاج 4 دقائق . وبالتالي يمكن صياغة القيد الثاني كما يلي:

$$5x_1 + 0x_2 + 4x_3 \leq 440$$

القيد العملية 3: إن أقصى زمن متاح للعملية الثالثة 465 دقيقة يوميا ، حيث أن الوحدة الواحدة من المنتج 1 يحتاج تصنيعها في العملية الثالثة 3 دقائق، والمنتج 2 يحتاج 6 دقائق ، بينما المنتج 3 لا يتطلب العملية الإنتاجية الثالثة. وبالتالي يمكن صياغة القيد الثالث كما يلي:

$$3x_1 + 6x_2 + 0x_3 \leq 465$$

شرط عدم السلبية: $x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$

ثانيا: دالة الهدف

دالة الهدف: هدف صاحب القرار في هذه المشكلة هو تحقيق أقصى ربح ممكن وعليه دالة الهدف تأخذ الشكل الأتي:

$$\text{Max} : Z = 5x_1 + 4x_2 + 7x_3$$

وعليه النموذج الرياضي للمشكلة يأخذ الشكل الأتي:

$$\text{Max} : Z = 5x_1 + 4x_2 + 7x_3$$

$$\text{S.t}\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 420 \\ 5x_1 + 4x_3 \leq 440 \\ 3x_1 + 6x_2 + \quad \leq 465 \\ x_1 , x_2 , x_3 \geq 0 \end{cases}$$

التمرين رقم 2

ترغب مديرية الثروة الحيوانية وضع برنامج خاص لإنتاج العلف الحيواني ، وقد قرر القيام بإنتاج نوعين من أنواع الأعلاف حيث كل نوع يتكون من مزيج من المواد الغذائية التي تطحن في مطاحن خاصة لتصبح

جاهزة للاستعمال، وأن تكلفة كل نوع من أنواع العلف تختلف من النوع إلى أخر كما هو مبين في الجدول أدناه[1]:

نوع المادة في تركيبة العلف	نوع الغلف		الاحتياجات الأسبوعية ك. غ
	A	B	
مادة 1	2	3	1250 على أقل
مادة 2	1	1	250 على أقل
مادة 3	5	3	900 على أقل
مادة 4	0.6	0.25	232.5 على أقل
تكلفة الوحدة الواحدة	41	35	

المطلوب: صياغة نموذج البرمجة الخطية الذي يحقق أقل تكلفة

الحل

نفرض أن عدد الوحدات المنتجة من العلف A هي x_1

نفرض أن عدد الوحدات المنتجة من العلف B هي x_2

أولا: تكوين القيود

القيد المادة1 : يحتاج نوع العلف A 2 غرام ونوع العلف B 3 غرامات من المادة الأولى، بينما تتمثل الاحتياجات الأسبوعية من هذه المادة على الأقل 1250 غرام. وبالتالي يمكن صياغة القيد الأول كما يلي:

$$2x_1 + 3x_2 \geq 1250$$

القيد المادة 2 : يحتاج نوع العلف A 1 غرام ونوع العلف B 1 غرام من المادة الثانية، بينما تتمثل الاحتياجات الأسبوعية من هذه المادة على الأقل 250 غرام. وبالتالي يمكن صياغة القيد الثاني كما يلي:

$$1x_1 + 1x_2 \geq 250$$

[1]- سهيلة عبد االله السعيد، الجديد في الأساليب الكمية وبحوث العمليات، الطبعة الأولى، دار الحامد للنشر والتوزيع، الأردن ، 2008، ص 49 . بتصرف

القيد المادة 3: يحتاج نوع العلف A 5 غرامات ونوع العلف B 3 غرامات من المادة الثالثة، بينما تتمثل الاحتياجات الأسبوعية من هذه المادة على الأقل 900 غرام. وبالتالي يمكن صياغة القيد الثالث كما يلي:

$$5x_1 + 3x_2 \geq 900$$

القيد المادة 4: يحتاج نوع العلف A 0.6 غرام ونوع العلف B 0.25 غرام من المادة الرابعة، بينما تتمثل الاحتياجات الأسبوعية من هذه المادة على الأقل 232.5 غرام. وبالتالي يمكن صياغة القيد الثالث كما يلي:

$$0.6x_1 + 0.25x_2 \geq 232.5$$

شرط عدم السلبية: $x_1 , x_2 \geq 0$

ثانيا: دالة الهدف

دالة الهدف: هدف صاحب القرار في هذه المشكلة هو تحقيق أقل تكلفة ممكنة وتحقق الاحتياجات الاسبوعية وعليه دالة الهدف تأخذ الشكل الأتي:

$$Min : Z = 41x_1 + 35x_2$$

وعليه النموذج الرياضي للمشكلة يأخذ الشكل الأتي:

$$Min : Z = 41x_1 + 35x_2$$

$$S.t \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 1250 \\ 1x_1 + 1x_2 \geq 250 \\ 5x_1 + 3x_2 \geq 900 \\ 0.6x_1 + 0.25x_2 \geq 232.5 \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases}$$

التمرين رقم 3

مصنع لإنتاج الخزانات المعدنية يحوي ماكنتين أحدهما قطع الصفائح وطاقتها التشغيلية 70 ساعة أسبوعيا والماكنة الثانية تقوم بطي ولحم الجوانب لتعطيها الشكل النهائي للخزان وطاقتها التشغيلية

60 ساعة أسبوعيا، وردت طلبية لتجهيز نوعين من الخزانات A و B على التوالي، والجدول التالي تبين الوحدات المطلوبة لإنتاج النوعين والمارة بالماكنتين.

الخزائن من نوع A : عدد الساعات التشغيلية على الماكنة الأولى 4 سا و عدد الساعات التشغيلية على الماكنة الثانية 10 سا.

الخزائن من نوع B : عدد الساعات التشغيلية على الماكنة الأولى 5 سا و عدد الساعات التشغيلية على الماكنة الثانية 6 سا.

وأما الربح الصافي المحقق من بيع الخزائن A هو 3 دج ومن بيع الخزائن B هو 6 دج، علما أن الطلبية تضمنت شرطا أن لا تقل كمية النوع الثاني من الخزانات B والمسلمة أسبوعيا عن 10 خزانات[1].

المطلوب: بناء النموذج الرياضي الذي يحقق أقصى ربح ممكن.

الحل

نفرض النوع الأول من الخزانات A هي x_1

نفرض أن النوع الثاني من الخزانات B هي x_2

أولا: تكوين القيود

القيد1 : إن أقصى طاقة تشغيلية للماكنة الأولى 70 ساعة أسبوعيا، حيث النوع الأول من الخزانات يحتاج 4 ساعات عمل والنوع الثاني يحتاج 5 ساعات عمل على الماكنة الأولى. وبالتالي يمكن صياغة القيد الأول كما يلي:

$$4x_1 + 5x_2 \leq 70$$

[1]- سهيلة عبد االله السعيد، مرجع سابق ذكره، ص.ص 33-35.

القيد 2: إن أقصى طاقة تشغيلية للماكنة الأولى 60 ساعة أسبوعيا، حيث النوع الأول من الخزانات يحتاج 10 ساعات عمل والنوع الثاني يحتاج 6 ساعات عمل على الماكنة الثانية. وبالتالي يمكن صياغة القيد الثاني كما يلي: $10x_1 + 6x_2 \leq 60$

القيد 3: هناك شرط أن إنتاجية النوع الثاني من الخزانات x_2 يجب أن لا يقل 10 خزانات أسبوعيا. وبالتالي يمكن صياغة القيد الثالث كما يلي: $x_2 \geq 10$

شرط عدم السلبية: $x_1 , x_2 \geq 0$

ثانيا: دالة الهدف

دالة الهدف: هدف إدارة المصنع في هذه المشكلة هو تحقيق أقصى ربح ممكن وعليه دالة الهدف تأخذ الشكل الأتي:

$$Max : Z = 3x_1 + 6x_2$$

وعليه النموذج الرياضي للمشكلة يأخذ الشكل الأتي:

$$Max : Z = 3x_1 + 6x_2$$

$$S.t \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \leq 70 \\ 10\, x_1 + 6x_2 \leq 60 \\ x_2 \geq 10 \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases}$$

ملاحظات:

- يمكن أن يكون نموذج مختلط يعني يحوي قيود تكون بإشارة أكبر أو يساوي (≥) و بإشارة أقل أو يساوي (≤) وبإشارة تساوي (=) سواء كانت دالة الهدف تعظيم أرباح أو تدنئة تكاليف.
- كلمة على الأقل تعني إشارة (≥) أكبر أو يساوي.

- كلمة على الأكثر تعني إشارة ($\leq$) أقل أو يساوي.
- كلمة تماما تعني إشارة تساوي (=).

المحور الثاني: الحل البياني

وهنا نعني بحل البرنامج الخطي بإيجاد قيم المتغيرات التي تجعل دالة الهدف في أمثل قيمة لها دون تجاوز حدود القيود، سواء حالة تعظيم أو تدنئة وذلك بإحدى الطرقتين هما الطريقة البيانية وطريقة سمبلكس.

وتستخدم الطريقة البيانية إذا كان النموذج يحتوي على متغيرين فقط، حيث يتعذر رسم النموذج في حالة احتواءه على أكثر من متغيرين، إذ تقوم هذه الأخيرة على فكرة تمثيل القيود بمعادلة خط مستقيم ومن تحديد منطقة الحلول الممكنة.

أ- **خطوات الحل البياني**

ولحل نموذج البرمجة الخطية بهذه الطريقة نتبع الأتي[1]:

1- تحويل المتباينات إلى معادلات أي (تحويل كل الإشارات إلى إشارة =)، مما يجعل إمكانية تمثيل القيد في خط مستقيم، ولمعرفة نقاط تقاطع الخط المستقيم مع المحور x_2 نفرض أن $x_1 = 0$ ثم يتم حل المعادلة بالنسبة إلى x_2، ولمعرفة نقاط تقاطع الخط المستقيم مع المحور x_1 نفرض أن $x_2 = 0$ ثم يتم حل المعادلة بالنسبة إلى x_1.

2- نرسم المحورين أحدهما أفقي (x_1)، والثاني عمودي (x_2)، ويتم تحديد نقاط التقاطع على المحورين ثم نصل بينهما بخط مستقيم.

3- تحديد منطقة الحل الممكن وهي منطقة تقاطع مناطق الحل والتي تقع ضمنها جميع النقاط التي تحقق جميع القيود في ان واحد.

[1]- دلال صادق الجواد، حميد ناصر الفتال، مرجع سابق ذكره، ص 31.

4- يتم تحديد الحل الأمثل من منطقة الحل الممكن ويكون الحل الأمثل الذي يحقق أكبر قيمة إذا كانت دالة الهدف تعظيم وأصغر قيمة إذا كانت دالة الهدف تقليل.

ملاحظات

- قيد من الشكل ($\geq$) أكبر أو يساوي: نقبل المنطقة العليا كمنطقة حلول ممكنة ونرفض المنطقة السفلى.
- قيد من الشكل ($\leq$) أقل أو يساوي: نقبل المنطقة السفلى كمنطقة حلول ممكنة ونرفض المنطقة العليا.
- قيد من الشكل تساوي (=): نرفض المنطقة السفلى ونرفض المنطقة العليا بحيث منطقة حلول ممكنة تكون النقاط الموجودة على القيد أي القيد نفسه.

التمرين رقم 4

$$Max : Z = 100x_1 + 60x_2$$

$$S.t \begin{cases} 8x_1 + 2x_2 \leq 40 \\ 6x_1 + 9x_2 \leq 108 \\ 8x_1 + 6x_2 \leq 96 \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: حل البرنامج التالي باستخدام الطريقة البيانية[1] .

الحل

1- تحويل المتراجحات إلى معادلات

$8x_1 + 2x_2 = 40$ (1)

$6x_1 + 9x_2 = 108$ (2)

$8x_1 + 6x_2 = 96$ (3)

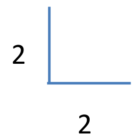
2- تحديد نقاط التقاطع للمعادلات (1)، (2)، (3)، مع المحورين (x_1)، (x_2)

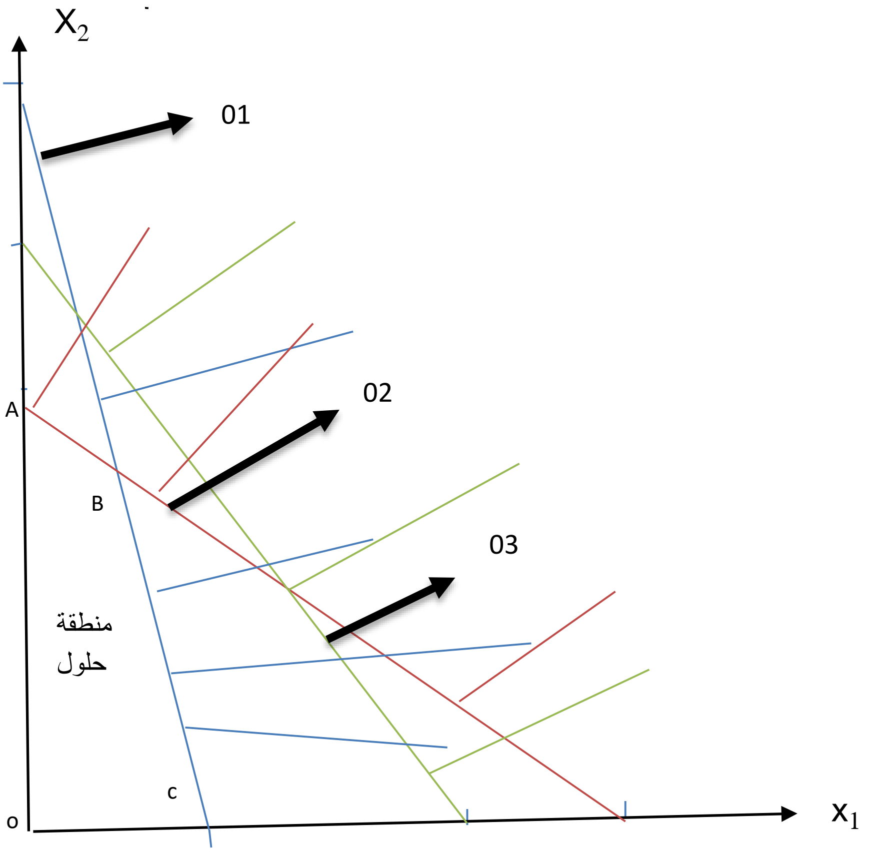
[1]- محمد راتول، مرجع سابق ذكره، ص 27.

$$(1)\begin{cases} x_1 = 0\ ,\ x_2 = 20 \\ x_2 = 0\ ,\ x_1 = 5 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} x_1 = 0\ ,\ x_2 = 12 \\ x_2 = 0\ ,x_1 = 18 \end{cases}$$

$$(3)\ \{\ x_1 = 0\ ,\ x_2 = 16 \quad ؛ \quad x_2 = 0\ ,x_1 = 12$$

3- الرسم البياني





وبعد رسم المستقيمات (1) و(2) و(3) نحدد مجال الحل والنقاط المشتركة بينهما تسمى منطقة الحلول الممكنة ، أي نقاط هذه المنطقة (o A B C)، أي (المنطقة غير المشطبة).

4- تحديد الحل الأمثل

وهنا تحديد الحل الأمثل الذي يقع على أحد نقاط زوايا المضلع (o A B C)، حيث نلاحظ أن قيم إحداثيات النقاط (o A C)، معروفة ما عدا نقطة B، التي تمثل نقطة تقاطع كلا من المستقيمين (1) و(2)، حيث يتم إيجاد احداثياتها بحل جملة معادلتين كما يلي:

$$8x_1 + 2x_2 = 40 \qquad\qquad (1)$$

$6x_1 + 9x_2 = 108$ (2)

بضرب المعادلة (1) في 3 والمعادلة (2) في 4 نجد :

$24x_1 + 6x_2 = 120$ (1)

$24x_1 + 36x_2 = 432$ (2)

بطرح (1) من (2) نجد :

$30 x_2 = 312 \longrightarrow x_2 = 10.4$

بالتعويض في احدى المعادلتين نجد : $x_1 = 2.4$

يمكن التحقق أن هذه النتيجة تحقق جميع القيود:

القيد الأول محقق تماما $8\times 2.4+ 2\times10.4 = 40$

القيد الثاني محقق تماما $6\times2.4 + 9\times10.4 = 108$

النقاط	$Max : Z = 100x_1 + 60x_2$
O(0,0)	$Max : Z = 100\times 0 + 60 \times0=0$
B(2.4,10.4)	$Max : Z = 100\times 2.4 + 60\times10.4 = 864$
A(0,12)	$Max : Z = 100\times 0 + 60\times 12=720$
C(5,0)	$Max : Z = 100\times 5 + 60\times0 =500$

من خلال هذا الحل نلاحظ أن أعظم ربح يمكن الحصول عليه عند النقطة B حيث أن :

$x_1 = 2.4$ ، $x_2 = 10.4$ ، $Z= 864$.

التمرين رقم 5

$$\text{Min} : Z = 10x_1 + 30x_2$$

$$\text{S.t}\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ 6x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_2 \geq 2 \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: أوجد حل أمثل للبرنامج باستعمال الطريقة البيانية [1].

الحل

3–تحويل المتراجحات إلى معادلات

$$3x_1 + 2x_2 = 6 \qquad (1)$$

$$6x_1 + x_2 = 6 \qquad (2)$$

$$x_2 = 2 \qquad (3)$$

4– تحديد نقاط التقاطع للمعادلات (1)، (2)، (3)، مع المحورين (x_1)، (x_2)

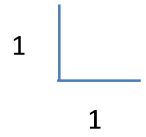
$$(1)\begin{cases} x_1 = 0 \ , \ x_2 = 3 \\ x_2 = 0 \ , \ x_1 = 2 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} x_1 = 0 \ , \ x_2 = 6 \\ x_2 = 0 \ , x_1 = 1 \end{cases}$$

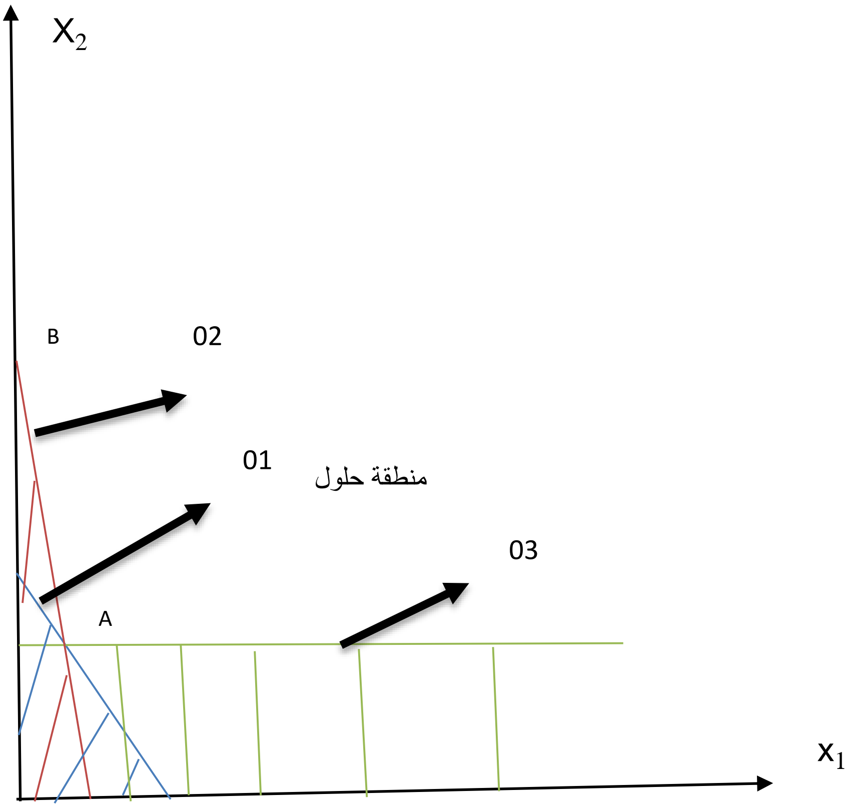
$$(3)\begin{cases} x_1 = 0 \ , \ x_2 = 2 \end{cases}$$

التمثيل البياني:

1- محمد راتول، مرجع سابق ذكره، ص 32. بتصرف

3- الرسم البياني





وبعد رسم المستقيمات (1) و(2) و(3) نحدد مجال الحل والنقاط المشتركة بينهما تسمى منطقة الحلول الممكنة أي (المنطقة غير المشطبة)، وعليه يكون الحل في أحد النقطتين في هذه المنطقة (A) أو (B).

4- تحديد الحل الأمثل

وهنا تحديد الحل الأمثل حيث نلاحظ أن قيم إحداثيات النقطة (B) ، معروفة ماعدا نقطة A، التي تمثل نقطة تقاطع كلا من المستقيمات (1) و(2) و(3)، حيث يتم إيجاد احداثياتها بحل جملة معادلتين كما يلي:

$$3x_1 + 2x_2 = 6 \qquad (1)$$

$$6x_1 + x_2 = 6 \qquad (2)$$

$$x_2 = 2 \qquad (3)$$

بتعويض المعادلة (3) في (1) أو (2) نجد :

$$3x_1 + 2\times 2 = 6 \longrightarrow 3x_1 = 2 \longrightarrow x_1 = \frac{2}{3}$$

بمأن هذه النتيجة تحقق جميع القيود وعليه:

النقاط	$Min : Z = 10x_1 + 30x_2$
$A(\frac{2}{3},2)$	$Min : Z = 10\times\frac{2}{3} + 30\times2 = 66.66$
$B(0,6)$	$Min : Z = 10\times 0+ 30\times6 = 180$

من خلال هذا الحل نلاحظ أن أدنى قيمة لدالة الهدف يمكن الحصول عليه عند النقطة A حيث أن :

$x_1 = \frac{2}{3}$ ، $x_2 = 2$ ، $Z= 66.66$.

ب- **الحالات الخاصة في الحل البياني**

إن مشكلات البرمجة الخطية بصورة عامة يمكن تطبيقها في مجالات واسعة وبنجاح، إلا أن هناك حالات خاصة يجب مراعاتها، ومن هذه الحالات نجد:

1. **تعدد الحلول المثلى:** وفي هذه الحالة يكون للبرنامج الخطي احتمال وجود أكثر من حل أمثل للمشكلة[1].

وكما هو موضح في المثال الأتي:

التمرين رقم 6

ينتج مصنع سلعتين يدخل في إنتاجهما مادتين من المواد الخام حيث الكمية المتاحة من المواد الخام وربح الوحدة موضح في الجدول أدناه:

الكميات المتاحة من المواد الخام (الاف)	سلعة 1	سلعة 2	
40	2	1	مادة 1
45	3	1	مادة 2
	10	5	ربح الوحدة

المطلوب: أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي باستخدام الطريقة البيانية

1- دلال صادق الجواد، حميد ناصر الفتال، مرجع سابق ذكره، ص 36. بتصرف

الحل

نفرض أن عدد الوحدات المنتجة من السلعة الأولى هي x_1

نفرض أن عدد الوحدات المنتجة من السلعة الثانية هي x_2

وعليه النموذج الرياضي للمشكلة يأخذ الشكل الأتي:

$$\text{Max} : Z = 5x_1 + 10x_2$$

$$\text{S.t}\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 40 \\ x_1 + 3x_2 \leq 45 \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases}$$

5-تحويل المتراجحات إلى معادلات

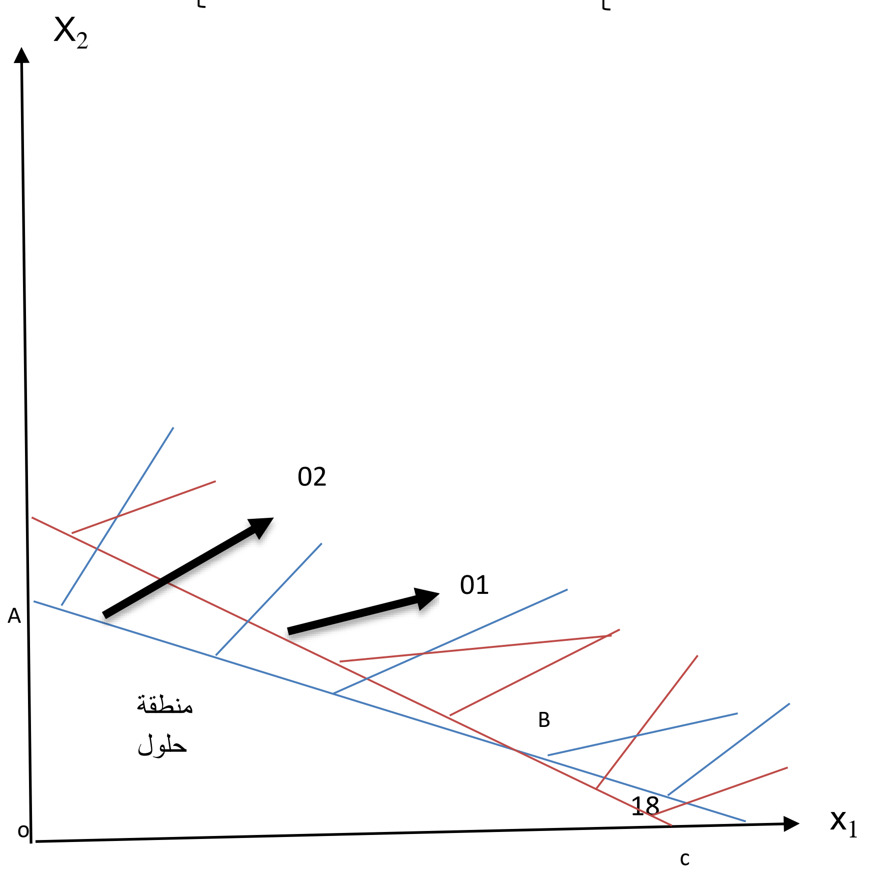
$$x_1 + 2x_2 = 40 \qquad (1)$$

$$x_1 + 3x_2 = 45 \qquad (2)$$

6- تحديد نقاط التقاطع للمعادلتين (1)، (2)، مع المحورين (x_1)، (x_2)

$$(1)\begin{cases} x_1 = 0 , x_2 = 20 \\ x_2 = 0 , \quad x_1 = 40 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} x_1 = 0 , x_2 = 15 \\ x_2 = 0 , x_1 = 45 \end{cases}$$

3- الرسم البياني



وبعد رسم المستقيمان (1) و(2) نحدد مجال الحل والنقاط المشتركة بينهما تسمى منطقة الحلول الممكنة ، أي نقاط هذه المنطقة (o A B C)، أي (المنطقة غير المشطبة).

4- تحديد الحل الأمثل

وهنا تحديد الحل الأمثل الذي يقع على أحد نقاط زوايا المضلع (o A B C)، حيث نلاحظ أن قيم إحداثيات النقاط (o A C)، معروفة ماعدا نقطة B، التي تمثل نقطة تقاطع كلا من المستقيمين (1) و(2)، حيث يتم إيجاد احداثياتها بحل جملة معاداتين كما يلي:

$$x_1 + 2x_2 = 40 \qquad (1)$$

$$x_1 + 3x_2 = 45 \qquad (2)$$

بطرح (2) من (1) نجد :

$x_2 = 5$

بالتعويض في احدى المعادلتين نجد : $x_1 = 30$

يمكن التحقق أن هذه النتيجة تحقق جميع القيود:

القيد الأول محقق تماما $30 + 2 \times 5 = 40$

القيد الثاني محقق تماما $30 + 3 \times 5 = 45$

النقاط	$Max : Z = 5x_1 + 10x_2$
O(0,0)	$Max : Z = 5 \times 0 + 10 \times 0 = 0$
B(30,5)	$Max : Z = 5 \times 30 + 10 \times 5 = 200$
A(0,15)	$Max : Z = 5 \times 0 + 10 \times 15 = 150$
C(40,0)	$Max : Z = 5 \times 40 + 10 \times 0 = 200$

من خلال هذا الحل نلاحظ أن النقطتين B و C تحققان لدالة الهدف قيمة عظمى $Z = 200$ ، يتضح من ذلك أن للمشكلة أكثر من حل واحد وهي حالة خاصة تعدد الحلول المثلى.

2. الحلول غير المحدودة

في هذه الحالة تكون منطقة الحل مفتوحة وليست مغلقة مما يجعل دالة الهدف تأخذ قيمة لا نهائية، مما لايمكن تحديد حل نهائي ومحدد للدالة[1]. وكما هو موضح في المثال الأتي:

التمرين رقم 7

$$Max : Z = 10x_1 + 20x_2$$

$$S.t \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \geq 75 \\ x_2 \leq 12 \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases}$$

7-تحويل المتراجحات إلى معادلات

$$3x_1 + 5x_2 = 75 \qquad (1)$$

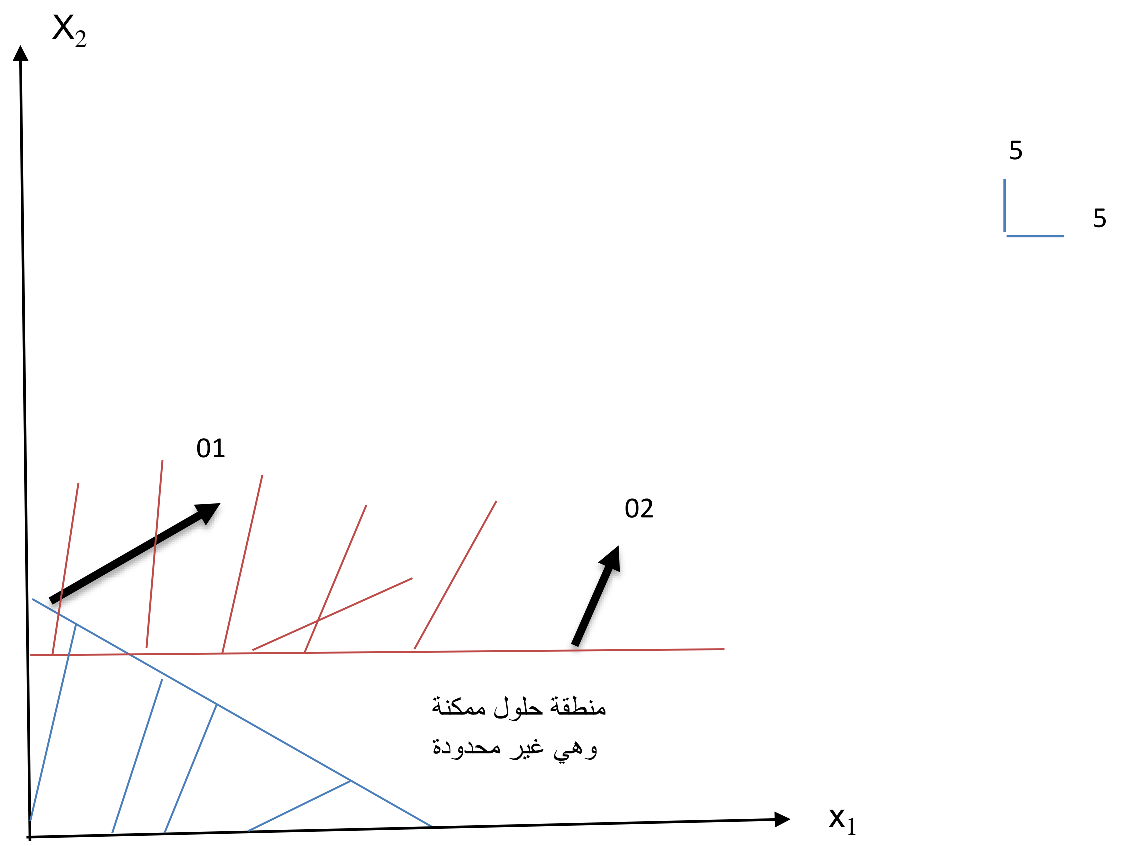
$$x_2 = 12 \qquad (2)$$

8- تحديد نقاط التقاطع للمعادلتين (1)، (2)، مع المحورين (x_1)، (x_2)

$$(1) \begin{cases} x_1 = 0 \ , \ x_2 = 15 \\ x_2 = 0 \ , \ x_1 = 25 \end{cases} \qquad (2) \ \ x_1 = 0 \ , \ x_2 = 12$$

3- الرسم البياني

1- دلال صادق الجواد، حميد ناصر الفتال، مرجع سابق ذكره، 40.



نلاحظ من خلال الشكل أنه توجد منطقة لا نهائية تحقق دالة الهدف أي تؤول إلى ما لانهاية من الحلول، وبالتالي نقول دالة الهدف لا نهائية.

3. عدم وجود حلول مقبولة (استحالة الحل)

في هذه الحالة تكون القيود متعاكسة أو متناقضة، حيث لا تتحقق لنا أي منطقة للحل الأمثل[1]. كما هو موضح في المثال الأتي:

التمرين رقم 8

$$\text{Max} : Z = 20x_1 + 15x_2$$

$$\text{S.t} \begin{cases} 5x_1 + 10x_2 \leq 25 \\ 5x_2 + 10x_2 \geq 50 \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases}$$

[1]- دلال صادق الجواد، حميد ناصر الفتال، مرجع سابق ذكره، ص 41.

1-تحويل المتراجحات إلى معادلات

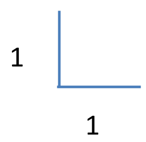
$$5x_1 + 10x_2 = 25 \qquad (1)$$

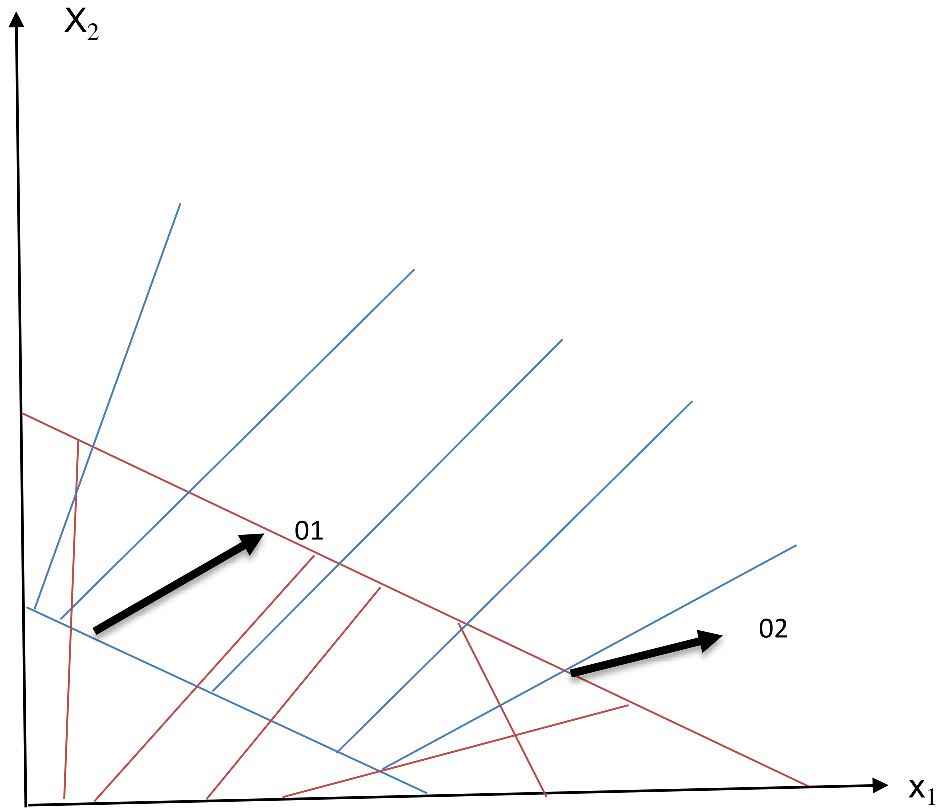
$$5x_1 + 10x_2 = 50 \qquad (2)$$

2- تحديد نقاط التقاطع للمعادلتين (1)، (2)، مع المحورين (x_1)، (x_2)

$$(1)\begin{cases} x_1 = 0\ , & x_2 = \frac{5}{2} \\ x_2 = 0\ , & x_1 = 5 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} x_1 = 0\ , & x_2 = 5 \\ x_2 = 0\ , & x_1 = 10 \end{cases}$$

3- الرسم البياني





نلاحظ من الشكل أن القيدين متعاكسين ولا يوجد منطقة حل مشتركة بين القيدين وعليه تعذر الوصول إلى حل مقبول لهذه المشكلة.

4. حالة انحلال الحل (القيد الفائض أو الحيادي)

في هذه الحالة يظهر أحد القيود كقيد فائض لا حاجة له وليس له أي تأثير على الحل[1]. ويمكن توضيح ذلك في المثال الأتي:

التمرين رقم 9

$$\text{Max}: Z = 12x_1 + 8x_2$$

$$\text{S.t}\begin{cases} 4x_1 + 9x_2 \leq 1800 \\ 3x_2 + 2x_2 \leq 400 \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3-تحويل المتراجحات إلى معادلات

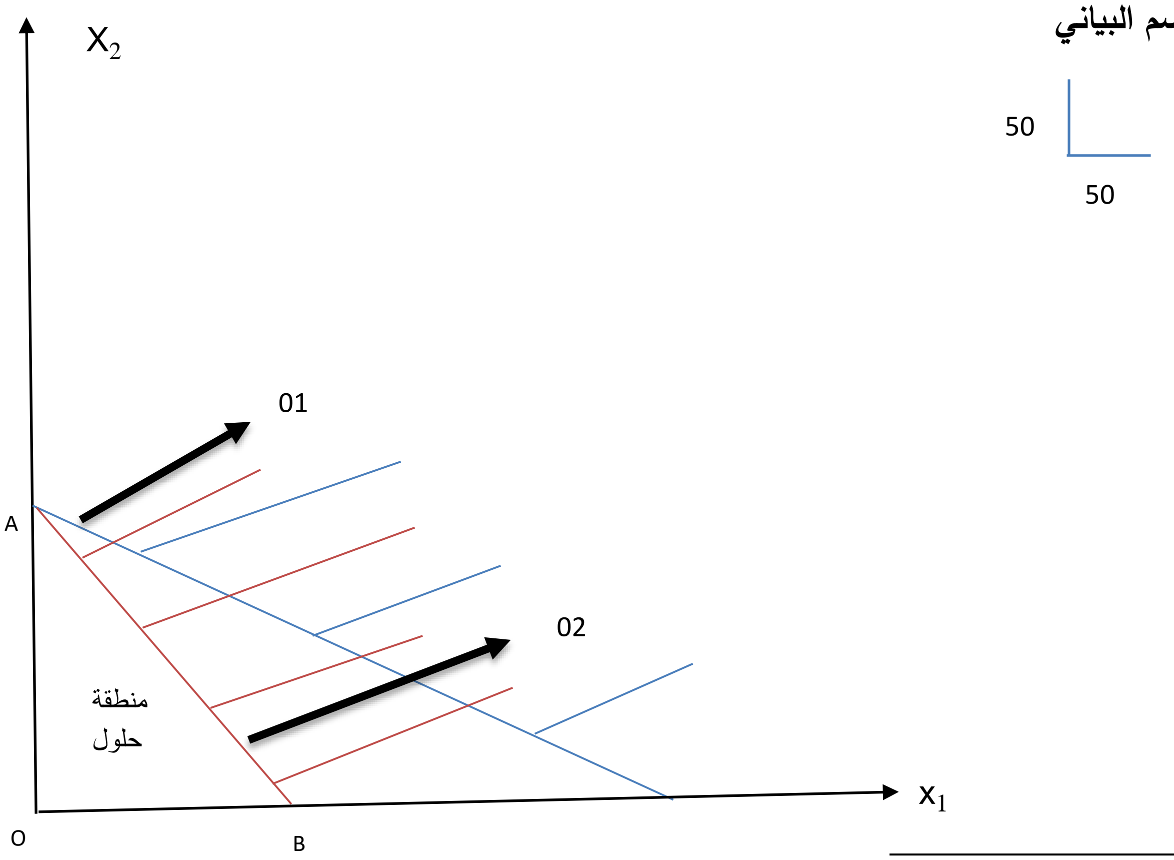
$$4x_1 + 9x_2 = 1800 \qquad (1)$$

$$3x_1 + 2x_2 = 400 \qquad (2)$$

4- تحديد نقاط التقاطع للمعادلتين (1)، (2)، مع المحورين (x_1)، (x_2)

$$(1)\begin{cases} x_1 = 0 , \quad x_2 = 200 \\ x_2 = 0 , \quad x_1 = 450 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} x_1 = 0 , \ x_2 = 200 \\ x_2 = 0 , x_1 = \frac{400}{3} \end{cases}$$

3- الرسم البياني



[1]- دلال صادق الجواد، حميد ناصر الفتال، مرجع سابق ذكره، ص 42.

نلاحظ من الشكل أن القيد الأول فائض ولم يؤثر في منطقة الحل (OAB)، حيث تحددت هذه الأخيرة بالقيد الثاني فقط، وفي هذه الحالة يسمى حلا منحلا.

المحور الثالث: عرض الحل بطريقة السمبلكس

طريقة السمبلكس أو طريقة الجداول تستخدم سواء كان عدد متغيرات البرنامج الخطي إثنين أو أكثر من ذلك، وتستخدم هذه الطريقة لحل النماذج الرياضية للبرمجة الخطية جبريا.

وتعتبر الصيغة القانونية ضرورية لإيجاد الحل الأساسي للبرنامج بطريقة السمبليكس، إذ يتم تحويل أي صيغة مهما كان شكلها إلى الصيغة القانونية، فإذا كان القيد عبارة عن متراجحة لابد من إدخال متغيرات صورية جديدة على البرنامج، سواء بإضافتها أو طرحها حسب الحالة لتتحول القيود إلى معادلات . ويتم ذلك حسب الحالات كما يلي[1]:

الحالة الأولى: إذا كان القيد على الشكل:

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 \ldots\ldots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

لتحويل القيد إلى معادلة ينبغي أن نضيف إلى الطرف الأيسر متغيرة صورية تسمى متغيرة الفجوة أو الإضافية نرمز لها x^e_j ، وتمثل هذه الأخيرة الطاقات غير المستعملة أو العاطلة وهي متغيرات يجب أن تكون غير سالبة.

وتجدر الإشارة إلى أنه عند إدخال متغيرة إضافية إلى القيد أصغر أو يساوي (≤)، يكون بإشارة موجبة، وفي دالة الهدف بمعامل يساوي الصفر.

الحالة الثانية: إذا كان القيد على الشكل:

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 \ldots\ldots + a_{mn}x_n \geq b_m$$

[1]- محمد راتول، مرجع سابق ذكره، ص.ص 41-53. بتصرف

لتحويل القيد إلى معادلة ينبغي أن نطرح إلى الطرف الأيسر متغيرة صورية أي متغيرة الفجوة أو الإضافية، كذلك نضيف متغيرات أخرى تسمى بالمتغيرات الاصطناعية نرمز لها x^a_j، حيت تكون بمعاملات +1 في القيود وفي دالة الهدف تأخذ معاملات يفترض أن تكون كبيرة جدا بإشارة سالبة نرمز لها ب M ، وذلك في دالة هدف في حالة تعظيم، بينما بإشارة موجبة في دالة هدف في حالة تدنئة.

ملاحظة: عندما يكون القيد من الشكل (=) نضيف متغير اصطناعي فقط.

أولا: إيجاد الحل في حالة التعظيم

لإيجاد الحل بطريقة السمبليكس في حالة التعظيم يتم إتباع الخطوات التالية:

1. نبحث عن الصيغة القانونية بحيث نوجد مصفوفة للقيود تتضمن مصفوفة أحادية.

2. تكون متغيرات الإضافية كمتغيرات أساس أو متغيرات داخل الأساس (قيمتها في بداية الحل هي المقابلة لها في عمود الثوابث)، بينما المتغيرات الحقيقية أو الأساسية نعتبرها خارج الأساس (قيمها في الجدول الأول معدومة)، كذلك قيمة دالة الهدف أيضا معدومة.

3. نرتب البيانات في جدول يسمى بجدول الحل الأساسي كما يلي:

C_j			C_1	C_2	.........C_n	0	0	0	B_i/a_{ij}
C_B	VB	B_i	x_1	X_2	.........X_n	x^e_1	x^e_2	........x^e_m	
C_{B1}	x^e_1	b_1	a_{11}	a_{12}	........a_{1n}	1	0	0	.
C_{B2}	x^e_2	b_2	a_{21}	a_{22}	........a_{2n}	0	1	0	.
C_{Bm}	x^e_m	b_m	a_{m1}	a_{m2}	.......a_{mn}	0	0	1	.
$Z = \Sigma C_{Bj} \times b_j$		$Z = \Sigma C_{Bj} \times x_j$	0	0	0	0	0	0	.
$C_j - Z_j$			$C_j - Z_j$	$C_j - Z_j$	$C_n - Z_n$	O	0	O	/

Source : J K SHARMA, OPERATIONS RESEARCH: THEORY AND APPLICATIONS, TRINITY , Sixth Edition, p103.

C_j: معاملات متغيرات في دالة الهدف.

C_B: معاملات متغيرات الأساس في دالة الهدف.

VB: متغيرات الأساس.

4. انطلاقا من جدول الحل الأساسي الأول نحضر لإعداد جدول الحل الأساسي الثاني، ذلك باختيار مايلي:

– المتغيرة التي تدخل الأساس(التي يكون لها أكبر معامل موجب في ($C_j - Z_j$)، يسمى العمود الذي ينتمي إليه المتغيرة بعمود الارتكاز.

– المتغيرة التي تخرج من الأساس (التي تقابل أصغر نسبة موجبة ناتجة من تقسيم عمود الثوابت (الطرف الأيمن للقيود على عمود عنصر الارتكاز B_i/a_{ij})، يسمى سطر المتغيرة التي تخرج من الأساس بسطر الارتكاز.

– عنصر الارتكاز هو العنصر الذي يتقاطع عنده عمود الارتكاز مع سطر الارتكاز.

5. الانطلاق إلى الجدول الموالي من خلال:

– نستبدل المتغيرة التي ستخرج من الأساس بالمتغيرة التي ستدخل الأساس.

– تحويل عمود عناصر عمود الارتكاز إلى عمود أحادي، بحيث يتحول عنصر الارتكاز إلى القيمة 1 وعناصر العمود الأخرى إلى قيم معدومة.

– تقسيم جميع قيم سطر الارتكاز على عنصر الارتكاز.

– تحويل بقية العناصر في الجدول بالعلاقة التالية:

العنصر الجديد = $d - \frac{b \times c}{a}$

d = العنصر القديم.

b = العنصر المقابل في صف الارتكاز.

c = العنصر المقابل في عمود الارتكاز.

a= عنصر الارتكاز أو المحوري.

6. الحصول على الحل الأمثل في حالة دالة الهدف من شكل (MAX)، عندما تصبح كل قيم صف (C_j - Z_j)، سالبة أو معدومة.

ملاحظة: يتم تحديد عدد المتغيرات الخارجة بطرح عدد القيود (n) من عدد المتغيرات (m)، لو فرضنا عدد القيود n=3 وعدد المتغيرات m=6 ، فإن عدد المتغيرات الخارجة يساوي 6−3 = 3 (أي يوجد ثلاث متغيرات خارجية مساوية للصفر وثلاث متغيرات داخلية).

التمرين رقم 10

$$\text{Max} : Z = 100x_1 + 60x_2$$

$$\text{S.t} \begin{cases} 8x_1 + 2x_2 \leq 40 \\ 6x_1 + 9x_2 \leq 108 \\ 8x_1 + 6x_2 \leq 96 \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: حل البرنامج الخطي باستخدام طريقة السمبليكس.

الحل

1− تحويل المتراجحات إلى معادلات (الصيغة القانونية)

$$8x_1 + 2x_2 + x^e_3 = 40$$

$$6x_1 + 9x_2 + x^e_4 = 108$$

$$8x_1 + 6x_2 + x^e_5 = 96$$

$$x_1 ، x_2 ، x^e_3 ، x^e_4 ، x^e_5 \geq 0$$

$$\text{Max} : Z = 100x_1 + 60x_2 + 0\, x^e_3 + 0\, x^e_4 + 0\, x^e_5$$

2− إيجاد الحل الأساسي الأول

لدينا عدد المتغيرات n=5 (النموذج يضم متغيرين أساسين وثلاث متغيرات فجوة أو إضافية) وعدد القيود m=3، ومنه m−n= 5−3 ، وعليه هناك متغيرين سوف نفرض قيمتهما صفر ونبدأ بالمتغيرات الأساسية

أي: $x_1 = 0 \quad / \quad x_2 = 0$

وبتعويض في القيود نتحصل على قيم باقي المتغيرات:

- بتعويض بقيمة ($x_1 = 0 \ / \ x_2 = 0$) في القيد الأول نجد:

$$8\times 0 + 2\times 0 + x^e_3 = 40 \longrightarrow x^e_3 = 40$$

- بتعويض بقيمة ($x_1 = 0 \ / \ x_2 = 0$) في القيد الثاني نجد:

$$6\times 0 + 9\times 0 + x^e_4 = 108 \longrightarrow x^e_4 = 108$$

- بتعويض بقيمة ($x_1 = 0 \ / \ x_2 = 0$) في القيد الثالث نجد:

$$8\times 0 + 6\times 0 + x^e_5 = 96 \longrightarrow x^e_5 = 96$$

ويتم حساب قيم Z_i من خلال حاصل مجموع ضرب قيم C_B في قيم كل عمود مقابل لها، مثال على ذلك :

$$Z_i = 0\times 40+0\times 108+0\times 96 = 0$$

ويكون جدول الحل الأساسي الأول كما يلي:

C_j			100	60	0	0	0	B_i/a_{ij}
C_B	VB	B_i	x_1	X_2	x^e_3	x^e_4	x^e_5	
0	x^e_3	**40**	**8**	**2**	**1**	**0**	**0**	**5**
0	x^e_4	108	**6**	9	0	1	0	18
0	x^e_5	96	**8**	6	0	0	1	12
Z = 0			**0**	0	0	0	0	
$C_j - Z_j$			**100**	60	0	O	0	/

صف الارتكاز

عمود الارتكاز

المتغيرة التي تدخل الأساس التي تقابل اكبر قيمة موجبة في صف $C_j - Z_j$

عنصر الارتكاز

المتغيرة التي تخرج من الأساس التي تقابل اقل قيمة موجبة في B_i/a_{ij}

3- الانتقال للحل الأساسي الثاني:

– نستبدل المتغيرة التي ستخرج من الأساس بالمتغيرة التي ستدخل الأساس، أي نستبدل x^e_3 ب x_1 .

– تحويل عمود عناصر عمود الارتكاز إلى عمود أحادي، بحيث يتحول عنصر الارتكاز إلى القيمة 1 وعناصر العمود الأخرى إلى قيم معدومة، كذلك تقسيم جميع قيم سطر الارتكاز (5، 0،0, 1، 8,2، 40)، على عنصر الارتكاز (8).

– تحويل بقية العناصر في الجدول بالعلاقة التالية:

العنصر الجديد = $d - \dfrac{b \times c}{a}$ على سبيل المثال لحساب عناصر الصف الثاني على النحو الأتي:

$$108 - \frac{6\times40}{8} = 78$$

$$9 - \frac{6\times2}{8} = \frac{15}{2}$$

$$0 - \frac{1\times6}{8} = -\frac{3}{4}$$

$$1 - \frac{0\times6}{8} = 1$$

$$0 - \frac{0\times6}{8} = 0$$

وبالمثل يتم حساب بقية العناصر ومنه نتحصل على الجدول التالي:

C_j			100	60	0	0	0	B_i/a_{ij}
C_B	VB	B_i	x_1	X_2	x^e_3	x^e_4	x^e_5	
100	x_1	5	1	**1/4**	1/8	0	0	20
0	x^e_4	**78**	**0**	**15 /2**	¾−	**1**	**0**	**10.4**
0	x^e_5	56	0	**4**	−1	0	1	14
Z = 500			100	**25**	25/2	O	0	
$C_j - Z_j$			0	**35**	−25/2	0	0	/

صف الارتكاز

المتغيرة التي تخرج من الأساس

عمود الارتكاز

المتغيرة التي تدخل الأساس

عنصر الارتكاز

بمأن الحصول على الحل الأمثل في حالة دالة الهدف من شكل (MAX)، عندما تصبح كل قيم صف ($C_j - Z_j$)، سالبة أو معدومة، نلاحظ من الجدول هناك قيمة أكبر من الصفر لذا فإن الحل الأمثل لم يتحقق بعد، لذا ينبغي إجراء خطوة أخرى لتحسينه.

4- **التحسين الثاني للحل:** نكرر نفس الخطوات وبنفس الترتيب ونتحصل على الجدول التالي:

C_j			100	60	0	0	0
C_B	VB	B_i	x_1	X_2	x^e_3	x^e_4	x^e_5
100	x_1	12/5	1	0	3/20	−1/30	0
60	x_2	52/5	0	1	−1/10	2/15	0
0	x^e_5	72/5	0	0	−3/15	−8/15	1
Z = 864			100	60	9	14/3	0
$C_j - Z_j$			0	0	−9	−14/3	0

من خلال الجدول نلاحظ أن جميع قيم صف ($C_j - Z_j$)، سالبة أو معدومة ومنه يمكن القول بأنه تم الوصول للحل الأمثل بحيث النتائج المتحصل عليها هي: $x^e_5 = 72/5$(طاقات غير مستغلة) $x_2 = 52/5$, , $x_1 = 12/5$, $Z = 864$ (هي نفس النتيجة التي تم توصل إليها في الحل البياني التمرين رقم 4).

ثانيا: إيجاد الحل في حالة التدنئة

لإيجاد الحل بطريقة السمبيلكس في حالة التدنئة (MIN)، لا يختلف كثيرا عن طريقة الحل في حالة التعظيم (MAX)، إلا في بعض النقاط المتمثلة في[1]:

- المتغيرات الاصطناعية في دالة الهدف من شكل (MIN)، يضاف بإشارة موجبة.

[1]- محمد راتول، مرجع سابق ذكره، ص.ص 59-64. بتصرف

- المتغيرة التي تدخل الأساس هي التي تكون لها أصغر معامل سالب في قيم صف $(C_j - Z_j)$.
- يتم الوصول للحل الأمثل عندما تكون جميع قيم صف $(C_j - Z_j)$، موجبة أو معدومة.

ملاحظة: المتغيرة الاصطناعية التي يتم خروجها من الأساس لا يتم حسابها والاستغناء عنها من مصفوفة المعاملات.

التمرين رقم 11

$$\text{Min} : Z = 3x_1 + 10x_2$$

$$\text{S.t}\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 \geq 10 \\ 2x_1 + 7x_2 \geq 14 \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: حل البرنامج الخطي باستخدام طريقة السمبليكس.

الحل

1- تحويل المتراجحات إلى معادلات (الصيغة القانونية)

$$5x_1 + 6x_2 - x^e_3 + x^a_5 = 10$$

$$2x_1 + 7x_2 - x^e_4 + x^a_6 = 14$$

$$x_1 ، x_2 ، x^e_3 ، x^e_4 ، x^a_5, x^a_6, \geq 0$$

$$\text{Min} : Z = 3x_1 + 10x_2 + 0x^e_3 + 0x^e_4 + Mx^a_5 + Mx^a_6$$

2- إيجاد الحل الأساسي الأول

لدينا عدد المتغيرات $n=6$ (النموذج يضم متغيرين أساسين وثلاث متغيرات فجوة أو إضافية) وعدد القيود $m=2$، ومنه $m-n= 6-2$ ، وعليه هناك 4 متغيرات سوف نفرض قيمتهما صفر ونبدأ بالمتغيرات الأساسية ومتغيرات الإضافية (ذات إشارة سالبة)، أي: $x_2 = 0$ / $x_1 = 0$ / $x^e_3= 0$ / $x^e_4= 0$.

وبتعويض في القيود نتحصل على قيم باقي المتغيرات:

- بتعويض بقيمة $(x_2 = 0$ / $x_1 = 0$ / $x^e_3= 0)$ في القيد الأول نجد:

$$5\times0 + 6\times0 - 1\times0 + x^a_5 = 10 \longrightarrow x^a_5 = 10$$

- بتعويض بقيمة ($x_2=0$ / $x_1=0$ / $x^e_4=0$) في القيد الثاني نجد:

$$2\times0 + 7\times0 - 1\times0 + x^a_6 = 14 \longrightarrow x^a_6 = 14$$

ويتم حساب قيم Z_i من خلال حاصل مجموع ضرب قيم C_B في قيم كل عمود مقابل لها، مثال على ذلك:

$$Z_i = M\times10 + M\times14 = 24\,M$$

ويكون جدول الحل الأساسي الأول كما يلي:

C_j			3	10	0	0	M	M	B_i/a_{ij}
C_B	VB	B_i	x_1	X_2	x^e_3	x^e_4	x^a_5	x^a_6	
M	x^a_5	**10**	**5**	**6**	**−1**	**0**	**1**	**0**	5/3
M	x^a_6	14	2	**7**	0	−1	0	1	2
Z = 24 M			7M	13M	−M	−M	M	M	
$C_j - Z_j$			3−7M	10−13M	M	M	0	0	/

صف الارتكاز

المتغيرة التي تخرج من الأساس التي تقابل اقل قيمة موجبة في B_i/a_{ij}

عمود الارتكاز

المتغيرة التي تدخل الأساس التي تكون لها أصغر معامل سالب في صف $C_j - Z_j$

عنصر الارتكاز

– الانتقال للحل الأساسي الثاني:

– نستبدل المتغيرة التي ستخرج من الأساس بالمتغيرة التي ستدخل الأساس، أي نستبدل x^a_5 ب x_2 .

– تحويل عمود عناصر عمود الارتكاز إلى عمود أحادي، بحيث يتحول عنصر الارتكاز إلى القيمة 1 وعناصر العمود الأخرى إلى قيم معدومة، كذلك تقسيم جميع قيم سطر الارتكاز (0, 1،0، 1−، 10،5،6)، على عنصر الارتكاز (6).

– تحويل بقية العناصر في الجدول بالعلاقة التالية:

العنصر الجديد = $d - \dfrac{b \times c}{a}$ على سبيل المثال لحساب عناصر الصف الثاني: على النحو الأتي:

$$14 - \frac{10\times7}{6} = \frac{7}{3}$$

$$2 - \frac{5\times7}{6} = -\frac{23}{6}$$

$$0 - \frac{-1\times7}{6} = \frac{7}{6}$$

$$-1 - \frac{0\times7}{6} = -1$$

$$1 - \frac{0\times7}{6} = 1$$

وبالمثل يتم حساب بقية العناصر ومنه نتحصل على الجدول التالي:

C_j			3	10	0	0	M	B_i/a_{ij}
C_B	VB	B_i	x_1	X_2	x^e_3	x^e_4	x^a_6	
10	X_2	5/3	5 /6	1	**−1/6**	0	0	−10
M	x^a_6	**7/3**	**−23/6**	**0**	**7/6**	**−1**	**1**	2
Z = 50/3 + 7/3 M			25/3−23/6M	10	−5/3+7/6M	−M	M	/
$C_j - Z_j$			−16/9+23/6M	0	5/3−7/6M	M	0	/

صف الارتكاز

المتغيرة التي تخرج من الأساس

عمود الارتكاز

المتغيرة التي تدخل الأساس

عنصر الارتكاز

بمأن الحصول على الحل الأمثل في حالة دالة الهدف من شكل (Min)، عندما تصبح كل قيم صف ($C_j - Z_j$)، موجبة أو معدومة، نلاحظ من الجدول هناك قيمة سالبة لذا فإن الحل الأمثل لم يتحقق بعد، لذا ينبغي إجراء خطوة أخرى لتحسينه.

5– **التحسين الثاني للحل:** نكرر نفس الخطوات وبنفس الترتيب ونتحصل على الجدول التالي:

C_j			3	10	0	0
C_B	VB	B_i	x_1	X_2	x^e_3	x^e_4
10	X_2	2	2/7	1	0	−1/7
0	x^e_3	2	−23/7	0	1	−6/7
Z = 20			20/7	10	0	−10/7
$C_j - Z_j$			1/7	0	0	10/7

نلاحظ من الجدول هناك أن جميع قيم صف ($C_j - Z_j$)، موجبة أو معدومة ومنه يمكن القول بأنه تم الوصول للحل الأمثل بحيث النتائج المتحصل عليها هي: $x^e_3 = 2$ (طاقات غير مستغلة)، $x_2 = 2$، $x_2 = 1$

$Z = 20$ (تقليل التكاليف إلى حد أدنى قدره 12).

ثالثا: الحالات الخاصة في طريقة السمبليكس

هناك بعض الحالات الخاصة ذات العلاقة بتطبيقات البرمجة الخطية والتي تواجهنا في حالة استخدام طريقة السمبليكس.

1) انحلال الحل (قيد فائض)

في هذه الحالة قد نواجه مشكلة تحديد المتغير الخارج الذي يقابل أقل قيمة موجبة في العمود عندما تتم تساوي نسبتين فيتم الاختيار عشوائيا لتحديد المتغير الخارج، مما سيظهر في الجدول اللاحق قيمة تساوي الصفر لأحد المتغيرات الأساسية أو أكثر وذلك يدل على عدم ضمان تحسن قيمة دالة الهدف لو تم الاستمرار بالحل[1].

[1]- حسين محمود الجنابي، الأحدث في بحوث العمليات، دار الحامد للنشر والتوزيع، الأردن، 2010، ص 95.

التمرين رقم 12

$$\text{Min}: Z = 10x_1 + 30x_2$$

$$\text{S.t} \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ 6x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_2 \geq 2 \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: حل البرنامج الخطي باستخدام طريقة السمبليكس.

الحل

1- تحويل المتراجحات إلى معادلات (الصيغة القانونية)

$$3x_1 + 2x_2 - x^e_3 + x^a_6 = 6 \quad (1)$$

$$6x_1 + x_2 - x^e_4 + x^a_7 = 6 \quad (2)$$

$$x_2 - x^e_5 + x^a_8 = 2 \quad (3)$$

$$x_1 ، x_2 ، x^e_3 ، x^e_4 ، x^e_5 , x^a_6, x^a_7, x^a_8 \geq 0$$

$$\text{Min}: Z = 10x_1 + 30x_2 + 0\, x^e_3 + 0\, x^e_4 + 0\, x^e_5 + M\, x^a_6 + M\, x^a_7 + M\, x^a_8$$

2- إيجاد الحل الأساسي الأول

لدينا عدد المتغيرات $n=8$ (النموذج يضم متغيرين أساسين وثلاث متغيرات فجوة أو إضافية) وعدد القيود $m=3$، ومنه $m-n= 8-3$ ، وعليه هناك 5 متغيرات سوف نفرض قيمتهما صفر ونبدأ بالمتغيرات الأساسية ومتغيرات الإضافية (ذات إشارة سالبة)، أي: $x_2 = 0$ / $x_1 = 0$ / $x^e_3 = 0$ / $x^e_4 = 0$ / $x^e_5 = 0$.

وبتعويض في القيود نتحصل على قيم باقي المتغيرات:

- بتعويض بقيمة ($x_2 = 0$ / $x_1 = 0$ / $x^e_3 = 0$) في القيد الأول نجد:

$$3\times0 + 2\times0 - 1\times0 + x^a_6 = 6 \longrightarrow x^a_6 = 6$$

- بتعويض بقيمة ($x_2 = 0$ / $x_1 = 0$ / $x^e_4 = 0$) في القيد الثاني نجد:

$$6\times0 + 1\times0 - 1\times0 + x^a_7 = 6 \longrightarrow x^a_7 = 6$$

- بتعويض بقيمة $(x^e_5 = 0 \,/\, x_1 = 0 \;/\; x_2 = 0)$ في القيد الثالث نجد:

$$0 - 0 + x^a_8 = 2 \longrightarrow x^a_8 = 2$$

ويتم حساب قيم Z_i من خلال حاصل مجموع ضرب قيم C_B في قيم كل عمود مقابل لها، مثال على ذلك :

$$Z_i = 10x_1 + 30x_2 + 0\,x^e_1 + 0\,x^e_2 + 0\,x^e_3 + M\times6 + M\times6 + M\times2 = 14\,M$$

ويكون جدول الحل الأساسي الأول كما يلي:

C_j			10	30	0	0	0	M	M	M	B_i/a_{ij}
C_B	VB	B_i	x_1	X_2	x^e_3	x^e_4	x^e_5	x^a_6	x^a_7	x^a_8	
M	x^a_6	6	**3**	2	−1	0	0	1	0	0	2
M	x^a_7	**6**	**6**	**1**	**0**	**−1**	**0**	**0**	**1**	**0**	1
M	x^a_8	2	**0**	1	0	0	−1	0	0	1	∞
Z = 14 M			9M	4M	−M	−M	−M	M	M	M	
$C_j - Z_j$			10−9M	30−4M	M	M	M	0	0	0	/

صف الارتكاز

المتغيرة التي تخرج من الأساس

عنصر الارتكاز

عمود الارتكاز

المتغيرة التي تدخل الأساس

- الانتقال للحل الأساسي الثاني:

C_j			10	30	0	0	0	M	M	
C_B	VB	B_i	x_1	X_2	x^e_3	x^e_4	x^e_5	x^a_6	x^a_8	B_i/a_{ij}
M	x^a_6	**3**	**0**	**3/2**	**−1**	**1/2**	**0**	**1**	**0**	**2**
10	x_1	1	1	**1/6**	0	−1/6	0	0	0	6
M	x^a_8	2	0	**1**	0	0	−1	0	1	2
Z = 5 M+10			10	5/2M+5/3	−M	1/2M−5/3	−M	M	M	
$C_j - Z_j$			0	85/3−5/2M	0	−1/2M+5/3	−M	0	0	/

صف الارتكاز

عنصر الارتكاز

عمود الارتكاز

يمكن ملاحظة حالة الانحلال عندما تساوت النسبة الموجبة أي (أقل قيمة)، التي سيتم على أساسها اختيار المتغيرة خارج الأساس لذا تم الاختيار عشوائيا بين x^a_6 و x^a_8 ، وتم هنا اختيار x^a_6 .

4− **التحسين الثاني للحل:** نكرر نفس الخطوات وبنفس الترتيب ونتحصل على الجدول التالي:

C_j			10	30	0	0	0	M	B_i/a_{ij}
C_B	VB	B_i	x_1	X_2	x^e_3	x^e_4	x^e_5	x^a_8	
30	X_2	2	0	1	**−2/3**	1/3	0	0	3−
10	x_1	2/3	1	0	**1/9**	−2/9	0	0	6
M	x^a_8	**0**	**0**	**0**	**2/3**	**−1/3**	**−1**	**1**	0= ε
Z = 200/3			10	30	−170/9+2/3M	70/9−1/3M	−M	M	
$C_j - Z_j$			0	0	170/9−2/3M	−70/9+1/3M	M	0	/

استمرار حالة الانحلال حيث نلاحظ أن القيمة المقابلة $x_a{}^8$ في عمود (Bi/aij) تساوي صفر وقد فرضناها (ε)، أصغر قيمة موجبة وهي قيمة بجوار الصفر لتسيهل عملية الحسابات.

C_j			10	30	0	0	0
C_B	VB	B_i	x_1	X_2	$x^e{}_3$	$x^e{}_4$	$x^e{}_5$
30	X_2	2	0	1	0	0	−1
10	x_1	2/3	1	0	0	1/6−	1/6
0	$x^e{}_3$	0	0	0	1	−1/2	−3/2
Z = 200/3			10	30	0	−5/3	−85/3
$C_j - Z_j$			0	0	0	5/3	85/3

نلاحظ أن حالة الانحلال استمرت إلى غاية الوصول إلى الحل الأمثل، لذلك لم تتحسن قيمة دالة الهدف وبقيت Z = 200/3.

2) حالة تعدد الحلول المثلى

عند وجود حلين أمثلين أو أكثر للمشكلة الاقتصادية حيث نستطيع التعرف على هذه الحالة عند الوصول إلى الحل الأمثل أي جميع قيم صف دالة الهدف مساوية للصفر أو موجبة، إلا أنه يلاحظ أن أحد المتغيرات غير الأساسية(لم يدخل إلى الحل الأساسي)، في صف دالة الهدف قيمته مساوية للصفر، مما يعني أن هناك حل أمثل أخر يعطي لنا نفس قيمة دالة الهدف ولكن بتشكيلة جديدة[1].

[1]- حسين محمود الجنابي، مرجع سابق ذكره، ص 98.

التمرين رقم 13

$$\text{Max} : Z = 4x_1 + 8x_2$$

$$\text{S.t} \begin{cases} 3x_1 + 6x_2 \leq 15 \\ 3x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: حل البرنامج الخطي باستخدام طريقة السمبليكس.

الحل

1- تحويل المتراجحات إلى معادلات (الصيغة القانونية)

$3x_1 + 6x_2 + x^e_3 = 15$

$3x_1 + 3x_2 + x^e_4 = 12$

x_1 ، x_2 ، ، x^e_3 ، $x^e_4 \geq 0$

$\text{Max} : Z = 4x_1 + 8x_2 + 0\, x^e_3 + 0\, x^e_4$

متغيرات خارجية $x_2 = 0$ / $x_1 = 0$ ⎬ متغيرات داخلية $x^e_3 = 15$ / $x^e_4 = 12$

2- إيجاد الحل الأساسي الأول

ويكون جدول الحل الأساسي الأول كما يلي:

C_j			4	8	0	0	B_i/a_{ij}
C_B	VB	B_i	x_1	X_2	x^e_3	x^e_4	
0	x^e_3	**15**	**3**	**6**	**1**	**0**	**15/6**
0	x^e_4	12	3	**3**	0	1	4
Z = 0			0	0	0	0	
$C_j - Z_j$			4	8	0	O	/

3- الانتقال للحل الأساسي الثاني

C_j			4	8	0	0	B_i/a_{ij}
C_B	VB	B_i	x_1	X_2	x^e_3	x^e_4	
8	X_2	15/6	**1/2**	1	1/6	0	5
0	x^e_4	**9/2**	**3/2**	**0**	**−1/2**	**1**	**3**
Z = 20			4	8	4/3	0	
$C_j - Z_j$			0	0	−4/3	0	/

نلاحظ من الجدول من الجدول أن كل معاملات دالة الهدف سالبة أو معدومة أي تم الوصول للحل الأمثل،

حيث : $X_2=15/6$ ، $x^e_4= 9/2$ ، $Z = 20$

وكذلك نلاحظ أن هناك قيمة صفرية في معاملات دالة الهدف التي تقابل x_1 علما بأنه متغير غير أساسي، مما يعني أن هناك أكثر من حل أمثل لهذه المشكلة، أي يعني بإمكاننا إدخال x_1 إلى الحل الأساسي مع بقاء نفس قيمة دالة الهدف في الحل السابق مع تشكيلة جديدة، كما يوضحه الجدول التالي:

C_j			4	8	0	0	B_i/a_{ij}
C_B	VB	B_i	x_1	X_2	x^e_3	x^e_4	
8	X_2	1	0	1	1/3	−1/3	
4	x_1	3	1	0	−1/3	2/3	
Z = 20			4	8	4/3	0	
$C_j - Z_j$			0	0	−4/3	0	/

نلاحظ من الجدول من الجدول أن كل معاملات دالة الهدف سالبة أو معدومة أي تم الوصول للحل الأمثل

مع بقاء نفس قيمة دالة الهدف في الحل السابق مع تشكيلة جديدة حيث : $X_2=1$ ، $x_1= 3$ ، $Z = 20$

3) عدم محدودية الحل

في هذه الحالة عندما تكون دالة الهدف من نوع (max)، حيث يمكن تعظيم قيمة دالة الهدف دون حدود، ويلاحظ هذه الحالة عند تعذر تطبيق شرط الأمثلية المتعلق بتحديد المتغير الخارج نظرا أن جميع القيم في عمود النسب سالبة أو غير معرفة نتيجة أن جميع قيم عمود الارتكاز سالبة أو معدومة[1].

التمرين رقم 14

$$\text{Max} : Z = 4x_1 + 2x_2$$

$$\text{S.t}\begin{cases} x_1 \geq 4 \\ x_2 \leq 10 \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: حل البرنامج الخطي باستخدام طريقة السمبليكس.

الحل

– تحويل المتراجحات إلى معادلات (الصيغة القانونية)

$$x_1 - x^e_3 + x^a_5 = 4$$

$$x_2 + x^e_4 = 10$$

$$x_1 ، x_2 ، ، x^e_3 ، x^e_4, x^a_5 \geq 0$$

$$\text{Max} : Z = 4x_1 + 2x_2 + 0\,x^e_3 + 0\,x^e_4 - M\,x^a_5$$

متغيرات خارجية $x_1 = 0$ / $x_2 = 0$ / $x^e_3 = 0$ متغيرات داخلية $x^a_5 = 4$ / $x^e_4 = 10$

2– إيجاد الحل الأساسي الأول

ويكون جدول الحل الأساسي الأول كما يلي:

[1]- حسين محمود الجنابي، مرجع سابق ذكره، ص 102.

C_j			4	2	0	0	$-M$	B_i/a_{ij}
C_B	VB	B_i	x_1	X_2	x^e_3	x^e_4	x^a_5	
$-M$	x^a_5	**4**	**1**	**0**	**−1**	**0**	**1**	4
0	X^e_4	10	**0**	1	0	1	0	∞
$Z = -4\ M$			$-M$	0	M	0	$-M$	
$C_j - Z_j$			$4+M$	2	$-M$	0	0	/

3– الانتقال للحل الأساسي الثاني

C_j			4	2	0	0	B_i/a_{ij}
C_B	VB	B_i	x_1	X_2	x^e_3	x^e_4	
4	x_1	4	1	0	−1	0	−4
0	X^e_4	10	0	1	0	1	∞
$Z = 16$			4	0	−4	0	
$C_j - Z_j$			0	−2	4	0	/

نلاحظ من الجدول أن الحل الأمثل لم يتحقق بعد لوجود قيمة موجبة في قيم صف $(C_j - Z_j)$، مما يستدعي تحسين الحل حيث المتغيرة الداخلة x^e_3 ، بينما لا يمكن تحديد المتغير الداخل لأن جميع قيم عمود الارتكاز سالبة أو معدومة، وعليه ستكون قيم عمود النسب سالبة أو غير معرفة وبالتالي يجب إهمالها وهي حالة عدم محدودية الحل.

4) حالة انعدام الحل

في هذه الحالة نصل إلى جدول فيه جميع معاملات دالة الهدف أقل أو تساوي الصفر في حالة التعظيم، أكبر أو تساوي الصفر في حالة التدنئة، لكن متغيرات الأساس تتضمن متغير اصطناعي واحد أو أكثر، مما يوحي بوجود خطأ في تركيب البرنامج[1].

التمرين رقم 15

$$\text{Max} : Z = 6x_1 + 4x_2$$

$$\text{S.t}\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ 6x_1 + 8x_2 \geq 24 \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: حل البرنامج الخطي باستخدام طريقة السمبليكس.

الحل

- تحويل المتراجحات إلى معادلات (الصيغة القانونية)

$$4x_1 + 2x_2 + x^e_3 = 4$$

$$6x_1 + 8x_2 - x^e_4 + x^a_5 = 24$$

$$x_1 ، x_2 ، ، x^e_3 ، x^e_4, x^a_5 \geq 0$$

$$\text{Max} : Z = 6x_1 + 4x_2 + 0\, x^e_3 + 0\, x^e_4 - M\, x^a_5$$

متغيرات خارجية $x_1 = 0$ / $x_2 = 0$ / $x^e_4 = 0$ } متغيرات داخلية $x^e_3 = 4$ / $x^a_5 = 24$

2- إيجاد الحل الأساسي الأول

ويكون جدول الحل الأساسي الأول كما يلي:

[1]- محمد راتول، مرجع سابق ذكره، ص 78.

C_j			6	4	0	0	$-M$	B_i/a_{ij}
C_B	VB	B_i	x_1	X_2	x^e_3	x^e_4	x^a_5	
0	x^e_3	**4**	**4**	**2**	**1**	**0**	**0**	2
$-M$	X^a_5	24	6	**8**	0	-1	1	3
$Z = -24\,M$			$-6M$	$-8M$	0	M	$-M$	
$C_j - Z_j$			$6+6M$	$4+8M$	0	$-M$	0	/

3- الانتقال للحل الأساسي الثاني

C_j			6	4	0	0	$-M$
C_B	VB	B_i	x_1	X_2	x^e_3	x^e_4	x^a_5
4	X_2	2	2	1	1/2	0	0
$-M$	X^a_5	8	-10	0	-4	-1	1
$Z = 8-8M$			$8+10M$	4	$2+4M$	M	$-M$
$C_j - Z_j$			$-(2+10M)$	0	$-(2+4M)$	$-M$	0

نلاحظ من الجدول أنه تم التوصل إلى الحل الأمثل حيث جميع قيم صف ($C_j - Z_j$)، سالبة أو معدومة، إلا أنه نلاحظ بقاء متغيرة اصطناعية في الحل الأساس X^a_5 (عمود المتغيرات الأساسية)، مما يعني أنه لا يوجد حل لهذه المشكلة.

المحور الرابع: المسألة الثنائية وتحليل الحساسية

أولا: المسألة الثنائية(النموذج المقابل)

1- خطوات صياغة النموذج المقابل (المسألة الثنائية)

إن لكل نموذج من نماذج البرمجة الخطية نموذجا مقابل له ومشتق منه، حيث يطلق على صياغة مشكلة بأسلوب البرمجة الخطية وعلى حلها بالنموذج الأولي(primal Model)، إلا أنه يمكن إعادة صياغة النموذج الأولي بأسلوب أخر ضمن نطاق البرمجة الخطية والتوصل لحل المشكلة ذات العلاقة، وهذه الأخيرة يطلق عليها النموذج المقابل (Dual Model)، إذ يساعد النموذج المقابل على اختزال خطوات الحل في بعض الأحيان والتوصل إلى نتائج للمشكلة بصورة أسرع[1].

وتتمثل خطوات صياغة النموذج المقابل فيما يلي[2]:

- معاملات دالة الهدف في النموذج الأولي تصبح ثوابت الجانب الأيمن في النموذج المقابل، كذلك ثوابت الجانب الأيمن في النموذج الأولي تصبح معاملات دالة الهدف في المقابل.
- تعكس إشارة اللامساواة من أصغر أو يساوي($\leq$) في النموذج الأولي، إلى أكبر أو يساوي($\geq$)، في النموذج المقابل وكذلك من أكبر أو يساوي($\geq$) في الأولي، إلى أصغر أو يساوي($\leq$) في المقابل.
- أي عمود في النموذج الأولي يعتبر قيد (صف) في النموذج المقابل وعليه فإن عدد قيود المقابل تساوي عدد متغيرات الأولي.
- أي قيد في النموذج الأولي يتحول إلى عمود في النموذج المقابل وعليه فإن عدد متغيرات في المقابل تساوي عدد قيود في الأولي.
- يجب أن يكون النموذج الأولي بالصيغة المماثلة أي أن كل متغيرات النموذج غير سالبة والقيود تكون في حالة التعظيم أصغر من أو تساوي وفي حالة التقليل (التدنئة) أكبر من أو يساوي.

1- سهيلة عبد االله السعيد، مرجع سابق ذكره، ص.ص 109-110.

2- حامد سعد نور الشمرتي، علي خليل الزبيدي، مدخل إلى بحوث العمليات، دار مجدلاوي للنشر والتوزيع، الطبعة الأولى، 2007، الأردن، ص 89.

- إذا كان القيد في النموذج الأولي عبارة معادلة (أي إشارة مساواة) يصبح القيد غير مقيد بالإشارة في النموذج المقابل أي يتم تحويلهما إلى متباينتين بإشارتين ($\le$) و ($\ge$).[1]

التمرين رقم 16

$$\text{Max} : Z = 5x_1 + 2x_2$$

$$\text{S.t} \begin{cases} x_1 + x_2 \le 20 \\ 2x_1 + x_2 \le 30 \\ -x_1 + 2x_2 \le 25 \\ x_1 , x_2 \ge 0 \end{cases}$$

المطلوب: أوجد المسألة الثنائية أو النموذج المقابل لهذا البرنامج.

الحل

- دالة الهدف: من Max إلى Min

- تحويل إشارة القيود من أصغر من أو يساوي في النموذج الأولي إلى أكبر من أو يساوي في النموذج المقابل.

$$\text{Max} : Z = \begin{array}{ccccl} 5x_1 & + & 2x_2 & & \\ x_1 & + & x_2 & \le 20 & \longrightarrow y_1 \\ 2x_1 & + & x_2 & \le 30 & \longrightarrow y_2 \\ -x_1 & + & 2x_2 & \le 25 & \longrightarrow y_3 \end{array}$$

دالة الهدف

$$\text{Min}: W = 20\,y_1+30\,y_2 +25$$

القيد 1 | القيد 2

$$y_1+2y_2 -y_3 \ge 5 \qquad y_1+y_2 +2y_3 \ge 2$$

وعليه النموذج المقابل كما يلي:

[1]- حسين محمود الجنابي، مرجع سابق ذكره، ص143.

$$\text{Min: } W = 20\,y_1+30\,y_2+25\,y_3$$

$$\begin{cases} y_1+2y_2-y_3 \geq 5 \\ y_1+y_2+2y_3 \geq 2 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

التمرين رقم 17

$$\text{Max : } Z = x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$\text{S.t}\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 20 \\ 2x_1 + 3\,x_2 + x_3 \geq 15 \\ x_1\,,\ x_2\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: أوجد المسألة الثنائية أو النموذج المقابل لهذا البرنامج.

الحل

نلاحظ أن مسألة البرمجة الخطية ليست بالصيغة المتماثلة حيث دالة الهدف من شكل تعظيم (Max)، أي يجب أن تكون إشارة جميع القيود أصغر من أو يساوي ($\leq$)، لذا يجب تحويل القيد الثاني($\geq$)، بضرب في (-1) كما يلي:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 20 \\ 2x_1 + 3\,x_2 + x_3 \geq 15 \quad \times \quad (-1) \quad (\text{تحويل القيد}) \end{cases}$$

وعليه الصيغة النهائية للنموذج الأولي كالأتي:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 20 \\ -2x_1 - 3\,x_2 - x_3 \leq -15 \end{cases}$$

$$\text{Max : } Z = x_1 + 2x_2 + x_3$$

وعليه النموذج المقابل لهذا النموذج الخطي كما يلي:

$$\text{Min: } W = 20y_1 - 15y_2$$

$$\begin{cases} y_1 - 2y_2 \geq 1 \\ 2y_1 - 3y_2 \geq 2 \\ 3y_1 - y_2 \geq 1 \\ y_1،y_2 \geq 0 \end{cases}$$

التمرين رقم 18

$$\text{Min : } Z = 20x_1 + 10x_2 + 15x_3 - 5x_4$$

$$\text{S.t} \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \geq 12 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: أوجد المسألة الثنائية أو النموذج المقابل لهذا البرنامج.

الحل

– دالة الهدف: من Min إلى Max

– تحويل إشارة القيود من أكبر من أو يساوي في النموذج الأولي إلى أصغر من أو يساوي في النموذج المقابل.

نلاحظ أن مسألة البرمجة الخطية ليست بالصيغة المتماثلة حيث دالة الهدف من شكل تقليل (Min)، أي يجب أن تكون إشارة جميع القيود أكبر من أو يساوي ($\geq$)، لذا يجب تحويل القيد الثاني(=)، حيث هذا القيد يكافئ قيدين كالأتي:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 \leq 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 \geq 4 \end{cases}$$

ويجب تحويل القيد الثاني أصغر من أو يساوي($\leq$)، إلى أكبر من أو يساوي ($\geq$)، بضرب في (-1) كمايلي:

$x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 \leq 4 \quad \times \; (-1)$ (تحويل القيد)

وعليه الصيغة النهائية للنموذج الأولي كالأتي:

$$\text{Min} : Z = 20x_1 + 10x_2 + 15x_3 - 5x_4$$

$$\text{S.t} \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \geq 12 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 \geq -4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 \geq 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

وعليه النموذج المقابل لهذا النموذج الخطي كما يلي:

$$\text{Max}: W = 12y_1 - 4y_2 + 4y_3$$

$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 + y_3 \leq 20 \\ y_1 - 2y_2 + 2y_3 \leq 10 \\ y_1 + y_2 - y_3 \leq 15 \\ 3y_1 - 2y_2 + 2y_3 \leq -5 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

التمرين رقم 19

$$\text{Max} : Z = 5x_1 + 6x_2$$

$$\text{S.t} \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ -x_1 + 5x_2 \geq 3 \\ 4x_1 + 7x_2 \leq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: أوجد المسألة الثنائية أو النموذج المقابل لهذا البرنامج.

الحل

نلاحظ أن مسألة البرمجة الخطية ليست بالصيغة المتماثلة حيث دالة الهدف من شكل تعظيم (Max)، أي يجب أن تكون إشارة جميع القيود أصغر من أو يساوي ($\leq$)، أي:

يجب تحويل القيد الأول(=)، حيث هذا القيد يكافئ قيدين كالأتي:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 5 \\ x_1 + 2x_2 \ge 5 \end{cases}$$

وتحويل القيد الثاني أكبر من أو يساوي ($\ge$)، إلى أصغر من أو يساوي($\le$)، بضرب في (-1) كمايلي:

$x_1 + 2x_2 \ge 5 \quad \times \ (-1)$(تحويل القيد)

يجب تحويل أيضا القيد الثاني من النموذج الأولي أكبر من أو يساوي ($\ge$)، إلى أصغر من أو يساوي($\le$)، بضرب في (-1) كما يلي:

$-x_1 + 5x_2 \ge 3 \ \times \ (-1)$(تحويل القيد)

وعليه الصيغة النهائية للنموذج الأولي كالأتي:

$$\text{Max} : Z = 5x_1 + 6x_2$$

$$\text{S.t} \begin{cases} -x_1 - 2x_2 \le -5 \\ x_1 + 2x_2 \le 5 \\ x_1 - 5x_2 \le -3 \\ 4x_1 + 7x_2 \le 8 \\ x_1 , x_2 \ge 0 \end{cases}$$

وعليه النموذج المقابل لهذا النموذج الخطي كما يلي:

$$\text{Min}: W = -5y_1 + 5y_2 - 3y_3 + 8y_4$$

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 + y_3 + 4y_4 \ge 5 \\ -2y_1 + 2y_2 - 5y_3 + 7y_4 \ge 6 \\ y_1، y_2 , y_3، y_4 \ge 0 \end{cases}$$

2- طريقة السمبلكس المقابلة

من أساسيات لحل النموذج الأولي بوساطة طريقة السمبلكس هي أن الموارد (قيم الجانب الأيمن للقيود)، يجب أن تكون أكبر من الصفر، بينما حل النموذج المقابل بواسطة طريقة السمبلكس يساعد من التخلص من هذا الشرط حيث إن قيمة الموارد ممكن أن تكون سالبة، على هذا الأساس فلا حاجة لإدخال المتغيرات الاصطناعية إلى النموذج وتتلخص هذه الطريقة فيما لي[1]:

- المتغير الخارج هو المتغير الأساسي الذي يقابل أكبر قيمة سالبة في عمود b .

- المتغير الداخل ينتج من حاصل قسمة صف الأرباح النسبية على صف المحور وتتم القسمة على القيم السالبة فقط، حيث يتم اختيار أعلى قيمة لتمثل المتغير الداخل في حالة كون دالة الهدف تقليل وأقل قيمة عندما تكون دالة الهدف تعظيم.

- الحل الأمثل للنموذج يتم توصل إليه عندما تكون كل قيم عمود b موجبة.

التمرين رقم 20

$$\text{Max : } Z = 20x_1 + 25x_2$$

$$\text{S.t}\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 40 \\ x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ 3x_1 + x_2 \leq 30 \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{cases}$$

صيغة النموذج المقابل هي:

$$\text{Min: } W = 40y_1 + 20y_2 + 30y_3$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 20 \\ 3y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 25 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

1- حامد سعد نور الشمرتي، علي خليل الزبيدي، مرجع سابق ذكره، ص 96.

لتطبيق طريقة السمبلكس المقابلة يجب تحويل إشارة القيود إلى أصغر أو يساوي وكذلك جعل قيم متجه الموارد سالبة، ذلك بضرب طرفي القيود ب(-1):

$$-2y_1 - y_2 - 3y_3 \le -20$$
$$-3y_1 - 2y_2 - y_3 \le -25$$

يتم تحويل النموذج إلى الصيغة القانونية:

$$\text{Min: } W = 40y_1 + 20y_2 + 30y_3 + 0y^e_4 + 0y^e_5$$

$$\begin{cases} -2y_1 - y_2 - 3y_3 + y^e_4 = -20 \\ -3y_1 - 2y_2 - y_3 + y^e_5 = -25 \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \ge 0 \end{cases}$$

ويكون جدول الحل الأساسي الأول كما يلي:

C_j			40	20	30	0	0
C_B	VB	B_i	y_1	y_2	y_3	y^e_4	y^e_5
0	y^e_4	−20	−2	−1	−3	1	0
0	y^e_5	−25	−3	−2	−1	0	1
Z = 0			0	0	0	0	0
$C_j - Z_j$			40	20	30	0	0

نلاحظ أن الجدول أعلاه لا يمثل حل الامثل لأن قيم المتغيرات الأساسية سالبة، المتغير الخارج هو y^e_5 (أكبر قيمة بإشارة سالبة)، بينما يتم تحديد المتغير الداخل قسمة صف الأرباح النسبية ($C_j - Z_j$)، على السطر المحوري أي:

$C_j - Z_j$	40	20	30	0	0
السطر المحوري	−3	−2	−1	0	1
	$\frac{-40}{3}$	−10	−30	0	0

وعليه فإن المتغير الداخل y_2 (أعلى قيمة سالبة)، ومن ثم حساب باقي عناصر الجدول بنفس طريقة السمبلكس العادية كالاتي:

C_j			40	20	30	0	0
C_B	VB	B_i	y_1	y_2	y_3	y^e_4	y^e_5
0	y^e_4	−15/2	−1/2	0	−5/2	1	−1/2
20	y_2	25/2	3/2	1	1/2	0	−1/2
Z = 250			30	20	10	0	−10
$C_j - Z_j$			10	0	20	0	10

نلاحظ أن الجدول أعلاه لا يمثل حل الأمثل لأن قيمة المتغير y^e_4 الأساسي سالب لذلك فهو المتغير الخارج، بينما يتم تحديد المتغير الداخل قسمة صف الأرباح النسبية ($C_j - Z_j$)، على السطر المحوري أي:

$C_j - Z_j$	10	0	20	0	10
السطر المحوري	−1/2	0	−5/2	1	−1/2
	−20	-	−8	-	−20

وعليه فإن المتغير الداخل y_3 (أعلى قيمة)، ومن ثم حساب باقي عناصر الجدول بنفس طريقة السمبلكس العادية كالاتي:

C_j			40	20	30	0	0
C_B	VB	B_i	y_1	y_2	y_3	y^e_4	y^e_5
30	y_3	3	1/5	0	1	−2/5	1/5
20	y_2	11	7/5	1	0	1/5	−3/5
Z = 310			34	20	30	−8	−6
$C_j - Z_j$			6	0	0	8	6

نلاحظ أن الجدول أعلاه يمثل حل الأمثل للنموذج المقابل لأن قيم المتغيرات الأساسية موجبة والحل هو:

$y_1=0$; $y_2= 11$; $y_3= 3$; $Z= 310$

ويمكن استخراج حل النموذج الاولي حيث قيم المتغيرات للنموذج الأولي تمثل قيم المتغيرات الوهمية في صف الأرباح النسبية أي:

$x_1= 8$; $x_1= 6$; $Z= 310$

ثانيا: تحليل الحساسية

إن من الضروري دراسة التغيرات التي تحدث في الحل الأمثل نتيجة التغيرات الحاصلة في معاملات النموذج وهذا ما يعرف بتحليل الحساسية، حيث هذه الأخيرة تقوم تحليل تغير الحل الأمثل وفقا إلى تغير المعاملات المختلفة.

فالغاية من تحليل الحساسية هو تحديد هذه المعاملات الحساسة بشكل بارز لإجراء تخمين أكثر دقة لها، إذ أن إجراء أي تغيير في النموذج الأصلي سيؤدي إلى تغير أرقام جدول السمبلكس النهائي، لذلك فمجرد إجراء حسابات بسيطة لتعديل هذا الجدول يتم معرفة ما إذا كان الحل الأمثل الأصلي هو الأن أمثل أم لا، فإذا كان غير أمثل فيستعمل كحل ممكن أساسي لإعادة بدء طريقة السمبلكس للوصول إلى الحل الأمثل الجديد[1].
ولتوضيح حالات تحليل الحساسية نستعين بالمثال الأتي:

التمرين رقم 21

شركة تقوم بإنتاج ثلاثة أنواع من المنتجات ولإنتاج هذه المنتجات فإن كل منتج يتطلب ساعات عمل معينة ومواد أولية، وعلى هذا الأساس تم تكوين النموذج الخطي الأتي:

[1]- حامد سعد نور الشمرتي، علي خليل الزبيدي، ص.ص 106-117. بتصرف

$$\text{Max}: Z = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3$$

$$\text{S.t}\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 20 & \text{ساعات العمل} \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 45 & \text{مواد أولية} \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

الحل

جدول الحل الأمثل

C_j			4	3	5	0	0
C_B	VB	B_i	x_1	X_2	X_3	x^e_4	x^e_5
4	X_1	15	1	4	0	3	−1
5	x_3	5	0	−2	1	−2	1
Z = 85			4	6	5	2	1
$C_j - Z_j$			0	−3	0	−2	−1

نلاحظ من الجدول أنه تم التوصل إلى الحل الأمثل حيث جميع قيم صف $(C_j - Z_j)$، سالبة أو معدومة، حيث على الشركة لتحقيق أعظم ربح $Z = 85$ ، عليها أن تنتج من $X_1 = 15$ و $x_3 = 5$.

أ) التغيرات في معاملات دالة الهدف

1− تغيير معامل دالة الهدف للمتغير غير الأساسي

نلاحظ من المثال السابق (التمرين رقم 21)، أن الحل الأمثل يتضمن انتاج كلا من X_1 15 و $x_3 = 5$ ، في حين يبقى المنتج X_2 لا ينتج طالما يمثل أقل المنتجات ربحا $\bar{C_2}$ (الربح النسبي)، لإنتاج هذا الأخير فإن ذلك يتطلب زيادة C_2 (معامل المنتج الثاني)، مما يؤدي إلى تغير قيمة معامل الربح النسبي $\bar{C_2}$، وعليه المتغير غير الأساسي X_2 يبقى غير أساسي أي يبقى الحل السابق أمثل طالما أن الربح النسبي $\bar{C_2}$ أقل يساوي الصفر أي:

معامل المتغير غير الأساسي X_2

$$C_2 = \overline{C_2} - (4 \quad 5)\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

قيم العمود للمتغير غير الأساسي X_2

الربح النسبي المتغير غير الأساسي

معامل المتغيرات الأساسية

X_1 / x_3

$$C_2 = \overline{C_2} + 6 \quad \Longrightarrow \quad \overline{C_2} = C_2 - 6$$

وكما تم الإشارة سابقا يبقى الحل أمثل طالما:

$\overline{C_2} = C_2 - 6 \leq 0$ أي $C_2 \leq 6$

وعليه طالما يبقى سعر المنتج الثاني أقل أو يساوي 6 سوف يكون غير اقتصادي، بافتراض أن ربح الوحدة من المنتج الثاني زاد ليصبح 7 (تغير معامل المنتج 2 من 3 ليصبح 7) وبالتالي الربح النسبي في الجدول السابق يصبح $\overline{C_2} = 1$، مما يجعل في هذه الحالة الجدول لا يمثل الحل الأمثل حيث يؤدي بدخول X_2 لتحسين الحل وزيادة في قيمة Z، وبالتالي البحث عن الحل الأمثل الجديد.

2- تغيير معامل دالة الهدف للمتغير الأساسي

التغير في ربح الوحدة الواحدة للمتغير الأساسي سواء هذا التغير بالزيادة أو النقصان سوف يؤثر على الحل الأمثل، مما قد يؤدي إلى استبعاد المتغير الأساسي من الحل الأمثل (أي يتحول إلى متغير غير أساسي)، لذا فإن هناك حد أعلى وأدنى لقيم C_1 و C_3 ، والتي تبقي الحل الأمثل في الجدول السابق (التمرين رقم 21)، دون أي تأثير، بينما أي تغير في C_1 و C_3 سيؤدي إلى تغيير قيم عمود C_B، مما تؤدي إلى تغير قيم معاملات الربح النسبية.

ولتحديد الحدود العليا والدنيا C_1 و C_3 ، حيث يبقى الحل امثل عندما لا تتأثر قيم الأرباح النسبية للمتغيرات الأساسية $\overline{C_1}$ و $\overline{C_3}$ أي تبقى صفرية، بينما تبقى الأرباح النسبية للمتغيرات غير الأساسية $\overline{C_2}$ و $\overline{C_4}$ و $\overline{C_5}$ غير موجبة كالأتي:

أولا: الحدود العليا والدنيا C_1

$$\bar{C_2} = 3 - (C_1 \quad 5)\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = 13 - 4\,C_1$$

$$\bar{C_4} = 0 - (C_1 \quad 5)\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = 10 - 3\,C_1$$

$$\bar{C_5} = 0 - (C_1 \quad 5)\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = C_1 - 5$$

وطالما أن:

- $\bar{C_2} \le 0$ أي $13 - 4\,C_1 \le 0 \longrightarrow C_1 \le \frac{13}{4}$
- $\bar{C_4} \le 0$ أي $10 - 3\,C_1 \le 0 \longrightarrow C_1 \ge \frac{10}{3}$
- $\bar{C_5} \le 0$ أي $C_1 - 5 \le 0 \longrightarrow C_1 \le 5$

وعليه فإن الحد الأعلى والأدنى ل C_1 : $\frac{13}{4} \le C_1 \le 5$

ثانيا: الحدود العليا والدنيا C_3

$$\bar{C_2} = 3 - (4 \quad C_3)\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = 2\,C_3 - 13$$

$$\bar{C_4} = 0 - (4 \quad C_3)\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = 2\,C_3 - 12$$

$$\bar{C_5} = 0 - (4 \quad C_3)\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 4 - C_3$$

وطالما أن:

- $\bar{C_2} \le 0$ أي $2\,C_3 - 13 \le 0 \longrightarrow C_3 \le \frac{13}{2}$

- $\bar{C_4} \leq 0$ أي $2\ C_3 - 12 \leq 0 \longrightarrow C_3 \leq 6$
- $\bar{C_5} \leq 0$ أي $4 - C_3 \leq 0 \longrightarrow C_3 \geq 4$

وعليه فإن الحد الأعلى والأدنى ل C_3 : $4 \leq C_3 \leq \frac{13}{2}$

3- تغير المعامل لكلا المتغيرات الأساسية وغير الأساسية

في هذه الحالة التغير يكون لمعاملات المتغيرات الأساسية وغير الأساسية حيث يتم اختبار صف $\bar{C}$ ، لمعرفة تأثير هذا التغير على الحل الأمثل.

بافتراض أن دالة الهدف هي: $Max : Z = 2\ x_1 + x_2 + 3x_3$ (نلاحظ التغير في معاملات لمعاملات المتغيرات الأساسية وغير الأساسية مقارنة بدالة الهدف السابقة $Max : Z = 4\ x_1 + 3x_2 + 5x_3$)، حيث هذا التغير في معاملات دالة الهدف قد لا يؤثر في الحل الأمثل وذلك في حالة بقاء قيم صف $\bar{C}$ غير موجبة، في حين لو ظهرت قيمة موجبة فإن الجدول السابق (التمرين رقم 21) لا يمثل الحل الأمثل كمايلي:

$$\bar{C_1} = \bar{C_3} = 0$$

$$\bar{C_2} = 1 - (2 \quad 3)\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = -1$$

$$\bar{C_4} = 0 - (2 \quad 3)\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\bar{C_5} = 0 - (2 \quad 3)\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -1$$

نلاحظ أن على الرغم من التغير في معاملات دالة الهدف (الأساسية والغير أساسية)، يبقى الجدول السابق حل أمثل مع وجود حل أمثل بديل $\bar{C_4} = 0$.

4- تغيير معاملات الجانب الأيمن

قبل التطرق إلى تحليل التغيرات سيتم التطرق لبعض المصطلحات الضرورية في هذا السياق تتمثل في[1]:

4-1 مصفوفة الأساس: تتمثل في الأعمدة المناظرة لمتغيرات الحل الأمثل الأساسية في جدول السمبلكس الأولي.

باعتماد على مثال السابق(التمرين رقم 20) يكون جدول الحل الأساسي الأول كما يلي:

C_j			4	3	5	0	0
C_B	VB	B_i	x_1	X_2	X_3	x^e_4	x^e_5
0	x^e_4	20	1	2	1	1	0
0	x^e_5	45	2	2	3	0	1
Z = 0			0	0	0	0	0
$C_j - Z_j$			4	3	5	0	0

وباعتبار أن متغيرات الحل الأمثل الأساسية في هذا المثال هي x_1وx_3 ، كما هي موضحة في جدول السابق للحل الأمثل (التمرين رقم 21)، وعليه مصفوفة الأساس تتمثل في:

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

4-2 معكوس مصفوفة الأساس: هي عبارة عن الأعمدة المناظرة للمتغيرات الإضافية في جدول الحل الأمثل.

وباعتبار أن متغيرات الاضافية في هذا المثال هي x^e_4 وx^e_5 ، وباعتماد الجدول السابق للحل الأمثل (التمرين رقم 20)، وعليه معكوس مصفوفة الأساس تتمثل في:

$$B^{-1}=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

[1]- حامد سعد نور الشمرتي، علي خليل الزبيدي، ص. ص 111-112 . بتصرف

إن التغيرات في الموارد سواء كانت بزيادة أم بالنقصان يعتبر من الأمور الهامة جدا التي يلجأ إليها عامل القرار في عمل التفسيرات الاقتصادية، ويمكن الحصول على الحل الأمثل الجديد عند تغير الطرف الأيمن للقيود باستخدام العلاقة الأتية:

$$\bar{b} = \boldsymbol{B^{-1}} \times \boldsymbol{b}$$

باعتماد على مثال السابق(التمرين رقم 21)، وبافتراض إضافة وحدة واحدة (ساعة) إلى الجانب الأيمن للقيد الأول (ساعات العمل)، أي متجه الموارد سوف يتحول من :

$$b = \begin{pmatrix} 20 \\ 45 \end{pmatrix} \quad \text{إلى} \quad b = \begin{pmatrix} 21 \\ 45 \end{pmatrix}$$

وعليه بالتعويض في العلاقة نجد:

$$\bar{b} = \boldsymbol{B^{-1}} \times \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} 21 \\ 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ولذلك فإن الإنتاج الأمثل الجديد هو: $X_1 = 18$; $x_2 = 0$; $X_1 = 3$; $Z = 87$، حيث التفسير الاقتصادي هو ان الزيادة ساعة عمل إضافية (وحدة واحدة) لقيد ساعات العمل أدت إلى زيادة في أرباح الشركة بمعدل 2 (الفرق بين قيمة $Z = 87$ الجديدة و قيمة $Z = 87$ القديمة).

وبافتراض أن b_1 يمثل ساعات العمل الممكن توافرها لكي يبقى الحل الأمثل بحيث:

$$\boldsymbol{B^{-1}} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ 45 \end{pmatrix}$$ يجب أن تكون أكبر أو تساوي الصفر

$$\boldsymbol{B^{-1}} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ 45 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ 45 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3b_1 - 45 \\ -2b_1 + 45 \end{bmatrix}$$

وهذا يعني أن الحل يبقى أمثل طالما:

$3b_1 - 45 \geq 0 \longrightarrow b_1 \geq \frac{45}{3}$

$-2b1 + 45 \geq 0 \longrightarrow b_1 \leq \frac{45}{2}$

وعليه إن الإنتاج سوف يشمل المنتجين X_1 وX_3 فقط طالما ساعات العمل تبقى ضمن المدى:

$$\frac{45}{3} \leq b_1 \leq \frac{45}{2}$$

5- التغيرات في مصفوفة القيود

هنالك عدة حالات للتغيرات التي تحدث في مصفوفة القيود كمايلي:

5-1 إضافة فعالية جديدة

بافتراض أن الشركة ترغب بإنتاج منتوج جديد يتطلب ساعة عمل واحدة و2 وحدة من المواد الأولية، حيث ربح الوحدة الواحدة من المنتوج 3 ألاف دج، لمعرفة مدى صلاحية إنتاج هذا المنتوج اقتصاديا سوف يتم إضافة متغير جديد إلى النموذج x_6 بمعامل ربح مقداره 3 مع إضافة عمود إلى جدول السمبلكس الأولي يتمثل في: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

ويعتبر الجدول السابق حل أمثل (تمرين رقم 20) في حالة كون $\overline{C_6}$ (الربح النسبي)غير موجب أي $\overline{C_6} \leq 0$

ولذلك يتم احتساب $\overline{C_6}$ كما يلي:

$$\overline{C_6} = C_6 - C_B\left[B^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right] \quad / \quad C_B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

معاملات المتغيرات الأساسية في جدول الحل الأمثل X_1 وX_3

$$\overline{C_6} = 3 - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}\left[\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right] = 3 - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 - 4 = -1$$

وبمأن $\overline{C_6} = -1$ هذا يعني أن الجدول السابق (التمرين رقم 21) يمثل حل أمثل أي أن إنتاج المنتوج الجديد غير اقتصادي، بينما في حالة $\overline{C_6}$ موجبة ذلك يعني أن الجدول السابق (التمرين رقم 21)، غير أمثل ويتطلب تحسين الحل أي تكملة طريقة السمبلكس للحصول على الحل الأمثل الجديد.

2-5 التغير في متطلبات الموارد للفعاليات الموجودة

وهنا تغيير متطلبات أحد المنتوجات ساعات العمل والمواد الأولية مما قد يؤثر على الحل الأمثل، حيث على سبيل المثال متطلبات الوحدة الواحدة من المنتج x_2 تغيرت من 2 ساعة عمل إلى ساعة عمل واحدة ومن 2 وحدة من المواد الأولية إلى 3 وحدات، أي عمود المنتج x_2 يصبح في جدول السمبلكس الأولي كما يلي:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ويعتبر الجدول السابق حل أمثل (التمرين رقم 21) في حالة كون $\overline{C_2}$ الجديد (الربح النسبي)غير موجب أي $\overline{C_2} \leq 0$ ولذلك يتم احتساب $\overline{C_2}$ كما يلي:

معاملات المتغيرات الأساسية في جدول الحل الأمثل X_1 وX_3

$$C_B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad / \quad \overline{C_2} = C_2 - C_B\left[\boldsymbol{B^{-1}} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right]$$

$$\overline{C_2} = 3 - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}\left[\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right] = 3 - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 - 5 = -2$$

وبمأن $\overline{C_2} = -2$ هذا يعني أن الجدول السابق (التمرين رقم 21) يمثل حل أمثل ، بينما في حالة $\overline{C_2}$ موجبة ذلك يعني أن الجدول السابق (التمرين رقم 21)، غير أمثل ويتطلب تحسين الحل أي تكملة طريقة السمبلكس للحصول على الحل الأمثل الجديد، في حين إذا كان التغير في متغير أساسي (تغير متطلبات أحد المنتوجات ساعات العمل والمواد الأولية ل X_1 أو X_3)، فإن الحل الأمثل يبقى أمثل إذا كانت قيمة $\overline{C}$ الجديدة للمتغير الأساسي (X_1 أوX_3) تساوي الصفر.

3-5 إضافة قيود جديدة

نفترض إضافة القيد الاتي للنموذج السابق(التمرين رقم 21):

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 50$$

لمعرفة مدى تأثير هذا القيد على الحل الأمثل يتم من خلال كون قيم المتغيرات الأساسية المثلي تحقق القيد أم لا أي: $X_1 = 15$ و $x_3 = 5$ (الحلول المثلي في جدول الحل الأمثل التمرين رقم 21)

$$3\times 15 + 0 + 2\times 5 = 55 > 50$$

لذلك فإن القيد لا يتحقق مما يعني أن جدول الحل الأمثل (التمرين رقم 21) أصبح حل غير أمثل، وعليه يتم إضافة القيد الجديد إلى المرحلة الأخيرة أي جدول الحل الأمثل ومن ثم تكملة طريقة السمبلكس للوصول إلى حل أمثل جديد، بينما في حالة تحقق القيد هذا يعني أن القيد المضاف لا يؤثر على الحل الأمثل.

وتمثل الحل الأمثل الجديد بعد أضافة القيد الجديد كما هو موضح كالأتي:

C_j			4	3	5	0	0	0
C_B	VB	B_i	x_1	X_2	X_3	x^e_4	x^e_5	x^e_6
4	X_1	15	1	4	0	3	−1	0
5	X_3	5	0	−2	1	−2	1	0
0	x^e_6	50	3	1	2	0	0	1
Z = 85			4	6	5	2	1	0
$C_j - Z_j$			0	−3	0	−2	−1	0

نلاحظ من الجدول السابق أن المتغيرات الأساسية X_1 و X_3 ، تمتلك معاملات موجبة في الصف الثالث إذ يجب أن تكون معاملاتها في صف القيد الإضافي تساوي صفر، لذا يتم ضرب الصف الأول لX_1 ب(−3) والصف الثاني لX_3 ب(−2) ويتم اضافتها للصف الثالث كما هو موضح في الجدول الأتي:

C_j			4	3	5	0	0	0
C_B	VB	B_i	x_1	X_2	x_3	x^e_4	x^e_5	x^e_6
4	X_1	15	1	4	0	3	−1	0
5	x_3	5	0	−2	1	−2	1	0
0	x^e_6	−5	0	−7	0	−5	1	1
Z = 85			4	6	5	2	1	0
$C_j - Z_j$			0	−3	0	−2	−1	0

نلاحظ من الجدول أن إحدى قيم عمود (b) سالبة لذلك نستخدم السمبلكس الثنائية للتوصل إلى الحل الأمثل، حيث المتغير الخارج x^e_6 باعتباره القيمة السالبة الوحيدة وبينما المتغير الداخل يتم تحديده بقسمة عناصر صف($C_j - Z_j$)، على القيم السالبة فقط في السطر المحوري كمايلي:

$C_j - Z_j$	0	−3	0	−2	−1	0
السطر المحوري	0	−7	0	−5	1	1
	–	3/7	–	2/5	–	–

وعليه المتغير الداخل (x^e_4)، أقل قيمة (دالة الهدف تعظيم)، ومن ثم حساب باقي عناصر الجدول بنفس طريقة السمبلكس العادية كالاتي:

C_j			4	3	5	0	0	0
C_B	VB	B_i	x_1	X_2	x_3	x^e_4	x^e_5	x^e_6
4	X_1	12	1	−1/5	0	0	−2/5	3/5
5	x_3	7	0	4/5	1	0	3/5	−2/5
0	x^e_4	1	0	7/5	0	1	−1/5	−1/5
Z = 83			4	16/5	5	0	7/5	2/5
$C_j - Z_j$			0	−1/5	0	0	−7/5	−2/5

وعليه الحل الأمثل $x_1 = 12$ ، $x_3 = 7$ ، $x^e_4=1$، $Z=83$ ، حيث نلاحظ أن قيمة Z تناقصت عند إضافة قيد جديد من (85 إلى 83).

التمرين رقم 22

إليك النموذج الخطي لشركة تصنيع الدراجات الهوائية كالأتي:

$$\text{Max} : Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4$$

$$\text{S.t} \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 150 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 120 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

استخدم تحليل الحساسية لمعرفة تأثير التغيرات الأتية على الحل الأمثل للمسألة:

1. تغيير معامل x_2 في دالة الهدف إلى 7.
2. تغيير معامل x_3 في دالة الهدف إلى 2.
3. تغيير معامل b_1 إلى 110.
4. تغيير معامل b_2 إلى 130.
5. تغيير متطلبات x_3 من $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ إلى $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$
6. تغيير متطلبات x_2 من $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ إلى $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
7. إضافة القيد $2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 \leq 228$

الحل

اليك جدول الحل الأمثل لشركة تصنيع الدرجات الهوائية:

C_j			1	2	3	2	0	0
C_B	VB	B_i	x_1	X_2	x_3	x_4	x^e_5	x^e_6
0	x^e_5	30	−1	−3	0	−1	1	−1
3	x_3	60	3/2	2	1	2	0	1/2
Z = 180			9/2	6	3	6	0	3/2
$C_j - Z_j$			−7/2	−4	0	−4	0	−3/2

1. تغيير معامل x_2 في دالة الهدف إلى 7

$$\overline{C_2} = 7 - (0 \quad 3)\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = 1$$

بمأن قيمة $\overline{C_2}$ موجبة فإن الحل الحالي لا يمثل الحل الأمثل لذلك نستمر بطريقة السمبلكس للوصول إلى الحل الأمثل كما هو موضح:

C_j			1	7	3	2	0	0
C_B	VB	B_i	x_1	X_2	x_3	x_4	x^e_5	x^e_6
0	x^e_5	30	−1	−3	0	−1	1	−1
3	x_3	60	3/2	2	1	2	0	1/2
Z = 180			9/2	6	3	6	0	3/2
$C_j - Z_j$			−7/2	−4	0	−4	0	−3/2

0	x^e_5	120	5/4	0	3/2	2	1	−1/4
7	x_2	30	3/4	1	1/2	1	0	1/4
Z = 210			21/4	7	7/2	7	0	7/4
$C_j - Z_j$			−17/4	0	−1/2	−5	0	−7/4

وعليه الحل الأمثل الجديد : $x_2= 30$ ، $x^e_5=120$، $Z=210$

2. تغيير معامل x_3 في دالة الهدف إلى 2

$\bar{C}_3 = \bar{C}_5 = 0$

$$\bar{C}_1 = 1 - (0 \quad 2)\begin{bmatrix} -1 \\ 3/2 \end{bmatrix} = -2$$

$$\bar{C}_2 = 2 - (0 \quad 2)\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = -2$$

$$\bar{C}_4 = 2 - (0 \quad 2)\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = -2$$

$$\bar{C}_6 = 0 - (0 \quad 2)\begin{bmatrix} -1 \\ 1/2 \end{bmatrix} = -1$$

بمأن قيم صف $C_j - Z_j$ (للمتغيرات غير أساسية) سالبة وعليه فإن الحل الأمثل السابق يبقى حل أمثل والتغير فقط يكون في قيمة دالة الهدف:

$$\text{Max} : Z = 0 + 2\times0 + 2\times60 + 2\times0 = 120$$

3. تغيير معامل b_1 إلى 110

وعليه بالتعويض في العلاقة نجد:

$$\bar{b} = \boldsymbol{B^{-1}} \times \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} 110 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 60 \end{pmatrix}$$

بمأن إحدى قيم عمود b سالبة فإن الحل الأمثل السابق لا يمثل الحل الأمثل لذلك نستمر بطريقة السمبلكس للوصول إلى الحل الأمثل كما هو موضح:

C_j			1	2	3	2	0	0
C_B	VB	B_i	x_1	X_2	x_3	x_4	x^e_5	x^e_6
0	x^e_5	−10	−1	−3	0	−1	1	−1
3	x_3	60	3/2	2	1	2	0	1/2
Z = 180			9/2	6	3	6	0	3/2
$C_j - Z_j$			−7/2	−4	0	−4	0	−3/2

وبمأن يوجد قيمة سالبة في عمود (B_i)، نستخدم طريقة السمبلكس الثنائية كما موضح في الجدول أدناه:

C_j			1	2	3	2	0	0
C_B	VB	B_i	x_1	X_2	x_3	x_4	x^e_5	x^e_6
2	X_2	10/3	1/3	1	0	1/3	−1/3	1/3
3	x_3	160/3	5/6	0	1	4/3	2/3	−1/6
Z = 500/3			19/6	2	3	14/3	4/3	1/6
$C_j - Z_j$			−13/6	0	0	−8/3	−4/3	−1/6

وعليه الحل الأمثل الجديد : $x_2= 10/3$ ، $x_3=160/3$، $Z=500/3$

4. تغيير معامل b_2 إلى 130

وعليه بالتعويض في العلاقة نجد:

$$\bar{b} = B^{-1} \times b = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} 150 \\ 130 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 65 \end{pmatrix}$$

بمأن إحدى قيم عمود b غير سالبة فإن الحل الأمثل السابق يمثل حل أمثل والتغير يكون في قيم المتغيرات الأساسية وقيمة دالة الهدف: $x_3=65$ ، $x^e_5= 20$, $x_1= x_2 = x_4 =0$

$$Max : Z =0 + 2\times0 + 3\times65+2\times0 = 195$$

5. تغيير متطلبات x_3 من $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ إلى $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

معاملات المتغيرات الأساسية في جدول الحل الأمثل X_3, x^e_5 $C_B= \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ /

$$\bar{C_3} = C_3 - C_B \left[B^{-1} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right]$$

$$\bar{C_3} = 3 - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \left[\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right] = 3 - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 3- 6 = -3$$

بمأن قيمة $\bar{C_3}$ سالبة (شرط بقاء الحل الأمثل السابق أن يكون الربح النسبي للمتغير الأساسي يساوي صفر $\bar{C_3}= 0$)، وعليه الحل الأمثل الجديد يتمثل في:

C_j			1	2	3	2	0	0
C_B	VB	B_i	x_1	X_2	x_3	x_4	x^e_5	x^e_6
0	x^e_5	30	−1	−3	**−2**	−1	1	−1
3	x_3	60	3/2	2	**2**	2	0	1/2
Z = 180			9/2	6	6	6	0	3/2
$C_j - Z_j$			−7/2	−4	**−3**	−4	0	−3/2

نلاحظ أن معاملات عمود المتغير الأساسي x_3 هي (−2 ،2)، لذا يجب تحويلها إلى (0،1)(متغير أساسي)، وعليه نقوم بقسمة الصف الثاني على 2 للحصول على معامل مساوي للواحد لx_3 ، وجمع الصف الثاني والأول لاستبعاد x_3 من الصف الأول كما هو موضح أدناه:

C_j			1	2	3	2	0	0
C_B	VB	B_i	x_1	X_2	x_3	x_4	x^e_5	x^e_6
0	x^e_5	90	1/2	−1	0	1	1	−1/2
3	x_3	30	3/4	1	1	1	0	1/4
Z = 90			9/4	3	3	3	0	3/4
$C_j - Z_j$			−5/4	−1	0	−1	0	−3/4

وعليه الحل الأمثل الجديد : $x^e_5= 0$ ، $x_3=30$، $Z=90$

6. تغيير متطلبات x_2 من $\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ إلى $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

معاملات المتغيرات الأساسية في جدول الحل الأمثل x^e_5 وX_3 $C_B=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ /

$$\bar{C_2} = C_2 - C_B\left[\boldsymbol{B^{-1}} \times \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right]$$

$$\bar{C_2} = 2 - \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}\left[\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1/2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right] = 2- \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1/2\end{pmatrix} = 2- 3/2 = 1/2$$

بمأن $\overline{C_2}$ موجبة فإن الحل الأمثل السابق هو غير أمثل (شرط بقاء الحل الأمثل السابق أن يكون الربح النسبي للمتغير الغير أساسي سالب أي $\overline{C_2} \leq 0$)، لذا نستمر بطريقة السمبلكس للتوصل للحل الأمثل:

C_j			1	2	3	2	0	0
C_B	VB	B_i	x_1	X_2	x_3	x_4	x^e_5	x^e_6
0	x^e_5	30	−1	**0**	0	−1	1	−1
3	x_3	60	**3/2**	**1/2**	**1**	**2**	**0**	**1/2**
Z = 180			9/2	6	6	6	0	3/2
$C_j - Z_j$			−7/2	**1/2**	0	−4	0	−3/2

0	x^e_5	30	−1	0	0	−1	1	−1
2	X_2	120	3	1	2	4	0	1
Z = 240			6	2	4	8	0	2
$C_j - Z_j$			−5	0	−1	−6	0	−2

وعليه الحل الأمثل الجديد : $x^e_5= 30$ ، $x_2=120$، $Z=240$

7. إضافة القيد $2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 \leq 228$

لمعرفة مدى تأثير هذا القيد على الحل الأمثل يتم من خلال كون قيم المتغيرات الأساسية المثلي تحقق القيد أم لا أي: $x_3 = 60$

$$2\times0 + 0 + 5\times60 + 0 = 300 \geq 228$$

بمأن القيد لا يتحقق إذا الحل الأمثل السابق غير أمثل لذلك يضاف القيد إلى الجدول الأمثل السابق ونستمر بطريقة السمبلكس لتوصل إلى الحل الأمثل الجديد:

C_j			1	7	3	2	0	0	0
C_B	VB	B_i	x_1	X_2	x_3	x_4	x^e_5	x^e_6	x^e_7
0	x^e_5	30	−1	−3	0	−1	1	−1	0
3	x_3	60	3/2	2	1	2	0	1/2	0
0	x^e_7	228	2	1	5	1	0	0	1
Z = 180			9/2	6	3	6	0	3/2	0
$C_j - Z_j$			−7/2	−4	0	−4	0	−3/2	0

نلاحظ من الجدول السابق أن المتغير الأساسي X_3 ، تمتلك معاملات موجبة في الصف الثالث إذ يجب أن تكون معاملاتها في صف القيد الإضافي تساوي صفر، لذا يتم ضرب الصف الثاني لـX_3 ب(−5) ويتم اضافتها للصف الثالث كما هو موضح في الجدول الأتي:

C_j			1	7	3	2	0	0	0
C_B	VB	B_i	x_1	X_2	x_3	x_4	x^e_5	x^e_6	x^e_7
0	x^e_5	30	−1	−3	0	−1	1	−1	0
3	x_3	60	3/2	2	1	2	0	1/2	0
0	x^e_7	−70	−11/2	−9	0	−9	0	−5/2	1
Z = 180			9/2	6	3	6	0	3/2	0
$C_j - Z_j$			−7/2	−4	0	−4	0	−3/2	0

نلاحظ من الجدول أن إحدى قيم عمود (b) سالبة لذلك نستخدم السمبلكس الثنائية للتوصل إلى الحل الأمثل كما هو موضح في الجدول الأتي:

C_j			1	7	3	2	0	0	0
C_B	VB	B_i	x_1	X_2	x_3	x_4	x^e_5	x^e_6	x^e_7
0	x^e_5	38	−7/18	−2	0	0	1	−13/18	−1/9
3	x_3	44	5/18	0	1	0	0	−1/18	2/9
2	x_4	8	11/18	1	0	1	0	5/18	−1/9
Z = 148			37/18	2	3	2	0	7/18	4/9
$C_j - Z_j$			−19/18	0	0	0	0	−7/18	−4/9

وعليه الحل الأمثل الجديد : $x^e_5= 38$ ، $x_4=8$، $x_3 =44$، $Z=148$

الفصل الثاني: مشاكل النقل

تعد مسألة النقل من المشاكل الخاصة في البرمجة الخطية حيث الهدف من استخدام نماذج النقل هو إيجاد الأسلوب الأمثل لتوزيع (نقل أو شحن)، سلعة أو مادة ما من مناطق إنتاجها (عرضها)، إلى مراكز استلامها أو استهلاكها (طلبها)، بحيث تكون تكلفة النقل الكلية أقل ما يمكن.

المحور الاول: صياغة المسألة

من متطلبات بناء نموذج البرمجة الخطية لمشكلة النقل ما يلي:

– وجود مجموعة من مراكز أو مصادر الإنتاج وتمثل جانب العرض (Supply) .

– وجود مجموعة من مراكز الاستلام أو الاستهلاك وتمثل جانب الطلب (Demand).

– توفر مجموعة من بدائل النقل الممكنة لكل بديل منها تكلفة معينة وقابلية استيعابية معينة.

– وجود هدف تسعى المنظمة أو صانع القرار إلى تحقيقه حيث غالبا ما يتعلق الهدف بتخفيض تكاليف النقل.

ويتكون نموذج البرمجة الخطية للنقل من نوعين من القيود الأساسية هما:

– قيود الكميات المتاحة عند مراكز الإنتاج (العرض).

– قيود الكميات المطلوبة عند مراكز الاستلام (الطلب).

فإذا كان هناك (m) من مراكز الإنتاج و(n) من مراكز الاستلام فإن الصيغة العامة لنموذج البرمجة الخطية لمشكلة النقل على النحو الأتي:

$$Min\ Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} Cij\ Xij$$

$$\text{S.T}\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} Xij = ai & i = 1,2, \dots\dots, m \text{ Supply} \\ \sum_{i=1}^{m} Xij = bj & j = 1,2, \dots\dots, n \text{ Demand} \\ X_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

ولتوضيح عناصر ومكونات نموذج البرمجة الخطية لمشكلة النقل لابد من بناء جدول النقل الذي على أساسه تتم عملية بناء وصياغة هذا النموذج كالأتي[1]:

إلى / من	D_1	D_2	....	D_n	a_i العرض
S_1	C_{11} x_{11}	C_{12} x_{12}	.....	C_{1n} x_{1n}	a_1
S_2	C_{21} x_{21}	C_{22} x_{22}	.....	C_{2n} x_{2n}	a_2
.	.	.	.	.	.
S_m	C_{31} x_{m1}	C_{32} x_{m2}	.....	C_{mn} x_{mn}	a_m
b_i الطلب	b_1	b_2	....	b_n	$\sum ai$ / $\sum bj$

m: عدد مراكز الإنتاج (التوزيع) / n: عدد مراكز الاستلام (الاستهلاك)

x_{mn}: كمية المنتجات المنقولة من مراكز الإنتاج (m) إلى مراكز الاستلام (n).

C_{mn}: تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المنتجات من مراكز الإنتاج (m) إلى مراكز الاستلام (n).

a_m: الكمية المعروضة أو المنقولة من مراكز الإنتاج (m).

b_n: الكمية المطلوبة في مراكز الاستلام (n).

وعليه استنادا لما سبق تتم عملية بناء نموذج البرمجة الخطية للنقل كمايلي:

1. **دالة الهدف:**

$$Min\ Z = \sum C_{ij}\ x_{ij}$$

$$\text{Min } Z = C_{11}x_{11} + C_{12}\ x_{12} + \ldots + C_{mn}\ x_{mn}$$

---

[1]- جهاد صباح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، فالح عبد القادر الحوري، بحوث العمليات والأساليب الكمية –نظرية وتطبيق–، دار جليس الزمان للنشر والتوزيع، 2008، ص.ص 147-153 .

2. القيود الأساسية: لدينا نوعين من القيود: قيود العرض و قيود الطلب

قيود العرض (مراكز الإنتاج) : $\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i$

$x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} = a_1$

$x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} = a_2$

... ...

$x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} = a_m$

قيود الطلب (مراكز الاستلام): $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_i$

$x_{11} + x_{21} + \dots + x_{m1} = b_1$

$x_{12} + x_{22} + \dots + x_{m2} = b_2$

... ...

$X_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{mn} = b_n$

قيود عدم السلبية: $x_{ij} \geq 0$

التمرين رقم 23

تمتلك شركة لصناعة الثلاجات ثلاثة مصانع S_1 ، S_2 ، S_3 ، الطاقة الإنتاجية لكل منها 40 ثلاجة، ترغب الشركة بتزويد إنتاجها من الثلاجات إلى ثلاثة مراكز تسويق تابعة لها D_1، D_2، D_3، حيث كان حجم الطلب لكل مركز تسويق هو 60، 30،30، ثلاجة على التوالي.

وتقدر تكلفة نقل الثلاجة الواحدة من S_1 إلى كل من D_1، D_2، D_3، هي 20،12،10 دج على التوالي، ومن S_2 إلى كل من D_1، D_2، D_3، هي 18،24،16 دج على التوالي، ومن S_3 إلى كل من D_1، D_2، D_3، هي 14،22،11 دج على التوالي.

المطلوب: صياغة نموذج البرمجة الخطية لمشكلة النقل

الحل

لصياغة نموذج البرمجة الخطية لمشكلة النقل يجب في البداية بناء جدول النقل كمايلي:

من \ إلى	D_1	D_2	D_3	العرض
S_1	10 x_{11}	12 x_{12}	20 x_{13}	40
S_2	18 x_{21}	24 x_{22}	16 x_{23}	40
S_3	14 x_{31}	22 x_{32}	11 x_{33}	40
الطلب	60	30	30	120

x_{ij} هي متغيرات القرار وعددها = عدد مراكز الإنتاج × عدد مراكز الاستلام = 3 × 3 = 9

دالة الهدف:

$$\text{Min } Z = \sum C_{ij}\, x_{ij}$$

$$\text{Min } Z = 10\, x_{11} + 12\, x_{12} + 20\, x_{13} + 18\, x_{21} + 24\, x_{22} + 16\, x_{23} + 14\, x_{31} + 22\, x_{32} + 11\, x_{33}$$

القيود:

- قيود مراكز الإنتاج(العرض):

$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 40$

$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 40$

$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 40$

- قيود مراكز الاستلام (العرض)

$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 60$

$x_{12} + x_{22} + x_{23} = 30$

$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 30$

قيود عدم السلبية: $x_{ij} \geq 0$

المحور الثاني: حل مسائل النقل

نماذج النقل تتميز بحل مختلف تقنيا عن طريقة السمبلكس حيث يستعمل طريقة حل ابتدائية ثم طريقة الحل الأمثل، حيث تتضمن طريقة الحل الابتدائي ثلاث طرق: طريقة الزاوية الشمالية الغربية، طريقة التكاليف الدنيا، طريقة فوجل التقريبية، ثم تحسين الحل الابتدائي وتتضمن طريقتين هما:

1. طريقة الحل الابتدائي

1.1 طريقة الزاوية الشمالية الغربية

هذه الطريقة تعتبر من طرق الحل الابتدائي التي تمثل طريقة حل أولية حيث تعتبر أفضل الطرق الابتدائية كونها لا تدخل جداول النقل في حالات خاصة(حالة انحراف)، فضلا عن كونها صالحة لبرامج (Min)، و(Max)، سميت بهذه التسمية نتيجة العمل انطلاقا من زاوية الشمال الغربي ومن اليسار إلى اليمين. ولإيحاد الحل الابتدائي حسب هذه الطريقة نتبع الخطوات الأتية[1]:

- تشغل الخلية الأولى على اليسار من أعلى الجدول أي الخلية $_{11}$ وذلك بإعطائها أكبر عدد ممكن من الوحدات، أي ترحيل عدد من الوحدات بحيث يراعي التقييد على S_i و D_j.

- بعد عملية الترحيل وتشغيل الخلية $_{11}$ ، إذا أصبحت $S_1=0$، يتم الانتقال عموديا إلى أسفل الخلية $_{21}$، و، إذا أصبحت $D_1=0$، يتم الانتقال إلى الخلية $_{12}$ على نفس السطر. وفي حالة $S_1=0$ و$D_1=0$ ، فإنه يتم الانتقال قطريا إلى الخلية $_{22}$.

- بعد عملية الانتقال يتم اتباع نفس الخطوات السابقة بحيث يجب أن تراعي دائما الخلايا التي يتم الانتقال إليها مع الكمية المتاحة S_i والكمية المطلوبة D_j ، وهكذا حتى يتم الوصول للحل الابتدائي. مع مراعاة تحقيق الشرط عدد الخلايا المشغلة أي المتغيرات الأساسية $m+n-1 = 8$.

التمرين رقم 24

[1]- بوقرة رابح، بحوث العمليات، مؤسسة شباب الجامعة، الإسكندرية، 2009، ص.ص 140-143. بتصرف.

إحدى المؤسسات لديها 4 مصادر و5 مراكز حيث تريد نقل بضاعة معينة من المصادر إلى المراكز بأقل تكلفة ممكنة، أما البضاعة المراد نقلها ممثلة في 700 وحدة بحيث الوحدات المتاحة بالمصادر متمثلة في:

المصدر	1	2	3	4
الوحدات	200	150	250	100

بينما الوحدات المطلوبة من المراكز فتتمثل في:

المركز	1	2	3	4	5
الوحدات	170	160	140	120	110

أما تكلفة نقل وحدة واحدة من المصدر i إلى المركز j فممثلة في:

1	2	3	4	5
2	2.5	2	3	1.5
3	1.5	1.5	2	3
1.5	3	2	1	1.5
2.5	2	2	2	2

المطلوب: إيجاد الحل حل الأساس المقبول باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية.

الحل: بناء جدول النقل كما يلي:

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	a_i
S_1	2 x_{11}	2.5 x_{12}	2 x_{13}	3 x_{14}	1.5 x_{15}	200
S_2	3 x_{21}	1.5 x_{22}	1.5 x_{23}	2 x_{24}	3 x_{25}	150
S_3	1.5 x_{31}	3 x_{32}	2 x_{33}	1 x_{34}	1.5 x_{35}	250
S_4	2.5 x_{41}	2 x_{42}	2 x_{43}	2 x_{44}	2 x_{45}	100
b_i	170	160	140	120	110	700 700

بينما الحل لجدول النقل بطريقة الزاوية الشمالية الغربية يتمثل في:

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	a_i
S_1	2 170	2.5 30	2	3	1.5	200
S_2	3	1.5 130	1.5 20	2	3	150
S_3	1.5	3	2 120	1 120	1.5 10	250
S_4	2.5	2	2	2	2 100	100
b_i	170	160	140	120	110	700 / 700

ولقد تم حساب الجدول السابق كمايلي:

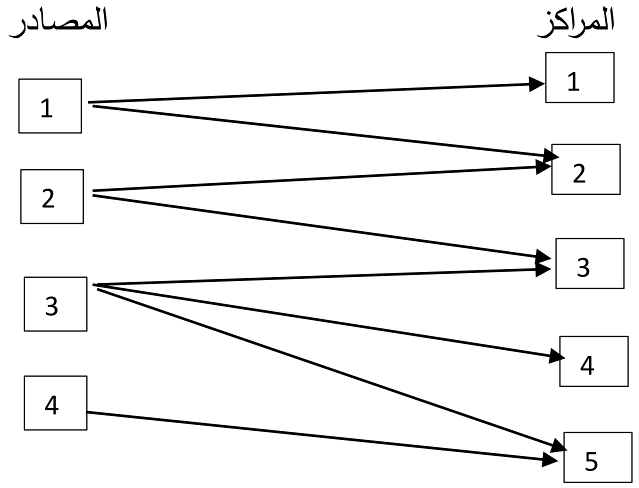
- أول خلية موافقة لمركز الإنتاج الأول و مركز التوزيع الأول (أعلى إلى اليسار)، نجد أن طلب مركز التوزيع D1 هو 170 وحدة، بينما حجم العرض S_1 هو 200 وحدة، فيحصل D1 على كافة طلبه 170 وحدة من D1، و يتشبع بذلك العمود الأول (D1)، و يتبقى لمركز الإنتاج S_1 كمية تقدر بـ 30 وحدة.
- بالانتقال إلى الخلية المقابلة والموافقة لمركز الإنتاج S_1، ومركز التوزيع D2، تقدر الكمية المعروضة بـ 30 وحدة وهي الكمية المتبقية بعد التوزيع الأول، و حجم الطلب 160 وحدة، و عليه ستوجه كل الكمية المعروضة من S_1 إلى D2، فيتشبع السطر الأول، و يبقى طلب D2 هو 130 وحدات ينبغي على S_2 تلبيته، وهكذا تتم باقي الخطوات.

وعليه تكون المتغيرات الأساسية كالأتي:

$x_{11}= 170$, $x_{12}= 30$, $x_{22}=130$, $x_{23}=20$, $x_{33}=120$, $x_{34}= 120$, $x_{35}=10$, $x_{45}=100$.

وأما باقي المتغيرات فتساوي الصفر.

طريقة النقل وفق زاوية الشمال الغربي



وبالتالي وفقا لهذه الطريقة سوف تحقق نقل كل الوحدات من المصادر الأربعة إلى المراكز الخمسة بتكلفة نقل متمثلة في:

$$\text{Min } Z = 2\,x_{11} + 2.5\,x_{12} + 1.5x_{22} + 1.5\,x_{23} + 2\,x_{33} + x_{34} + 1.5\,x_{35} + 2\,x_{45}$$

$$\text{Min } Z = 2 \times 170 + 2.5 \times 30 + 1.5 \times 130 + 1.5 \times 20 + 2 \times 120 + 120 + 1.5 \times 10 + 2 \times 100 = 1215.$$

2.1 طريقة أقل تكلفة ممكنة

وتعتمد خطوات هذه الطريقة على وضع أكبر كمية ممكنة لأقل تكلفة ممكنة في جميع مربعات الجدول[1]، حيث هذه الطريقة من طرق الحل الابتدائي وتمكن من الوصول إلى الحل الأمثل بسرعة مقارنة بطريقة زاوية الشمال الغربي، لذا نجد أن التكلفة في هذه الطريقة اقل منها في طريقة الحل السابقة .

وتتمثل الخطوات المتبعة في هذه الطريقة فيما لي[2]:

- بعد وضع الجدول يتم اختيار الخلية التي بها أقل تكلفة وفي حالة وجود مجموعة خلايا متساوية التكلفة يتم اختيار الخلية التي يتم تشغيلها بأكبر عدد ممكن من الوحدات مع مراعاة التقييد بالوحدات المتاحة والوحدات المطلوبة S_i و D_j.

---

[1]- أبو القاسم مسعود الشيخ، بحوث العمليات، المجموعة العربية للتدريب والنشر، الطبعة الثانية، مصر، 2009، ص 215.

[2]- بوقرة رابح، مرجع سابق ذكره، ص 144. بتصرف

- بعد تشغيل الخلية المختارة يتم اتباع نفس طريقة الخطوة الأولى أي اختيار الخلية التي بها تكلفة موالية وتشغيلها بأكبر عدد ممكن من الوحدات وهكذا تتوالي حتى نهاية العملية. مع شرط تحقيق عدد الخلايا المشغلة يساوي (m+n-1).

واعتماد على التمرين السابق رقم (24) يكون الحل بطريقة أقل تكلفة نجد :

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	a_i
S_1	2 40	2.5	2 50	3	1.5 110	200
S_2	3	1.5 150	1.5	2	3	150
S_3	1.5 130	3	2	1 120	1.5	250
S_4	2.5	2 10	2 90	2	2	100
b_i	170	160	140	120	110	700 700

ولقد تم حساب الجدول السابق كما يلي:

- نلاحظ أن أدنى تكلفة في الجدول هي 1.5، أي نقل المنتج من المنبع الأول S_1 إلى المصب الأول **D_5** ويتم تزويده ب 110، ليتم إشباع طلب المصب الخامس كليا من المنبع الأول. أما التكلفة الموالية فهي 1، أي نقل المنتج من المنبع الأول S_3 إلى المصب الرابع**D_4** ويتم تزويده ب120، ليتم إشباع طلب المصب الرابع كليا من المنبع الثالث.

- أما التكلفة الموالية فهي 1.5، ونلاحظ تساوي التكلفة لأكثر من خلية وطريقة الاختيار هنا تعتمد على أكبر قدر من الطلب، فلو تمت مقارنة طلب كل من المصب الأول والثاني والثالث، فإن المؤسسة حتما

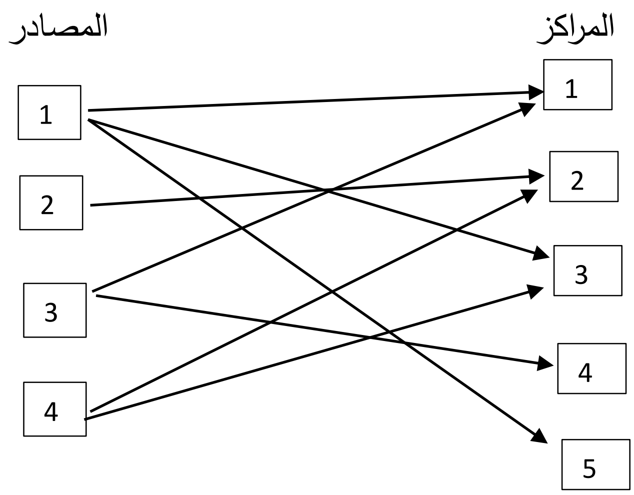
سوف تختار الطلب الأكبر لتصريف أكبر قدر من منتجاتها، لذلك يتم تزويد طلب المصب الأول من المنبع الثالث ب 130؛ وهكذا تستمر باقي الخطوات مع مراعاة كمية العرض والطلب.

وعليه تكون المتغيرات الأساسية كالأتي:

$x_{11}= 40$, $x_{13}=50$, $x_{15}=110$, $x_{23}=150$, $x_{31}= 130$, $x_{34}=120$, $x_{42}= 10$,$x_{43}=90$.

وأما باقي المتغيرات فتساوي الصفر.

طريقة النقل بأقل تكلفة



وبالتالي وفقا لهذه الطريقة سوف تحقق نقل كل الوحدات من المصادر الأربعة إلى المراكز الخمسة بتكلفة نقل متمثلة في:

$$\text{Min } Z =2\, x_{11}+ 2x_{13} +1.5\, x_{15}+1.5\, x_{23}+ 1.5x_{31}+x_{34}+2\, x_{42}+2\, x_{43}$$

$$\text{Min } Z =2 \times 40+2\times 50 +1.5 \times 110+1.5 \times 150+ 1.5\times 130 +120 +2\times 10+2 \times 90= 1085.$$

3.1 طريقة فوجل(VAM)

تعد هذه الطريقة من أفضل طرق الحصول على الحل الأولي لمشكلة النقل نظرا لأنها تعطي حلا أقرب إلى الحل الأمثل. وتتمثل ألية عمل هذه الطريقة كمايلي:

- حساب الفرق بين أقل تكلفتين في كل صف وفي كل عمود.
- نختار أكبر فرق ناتج من بين الصفوف والأعمدة وفي حالة تساوي أكثر من قيمة واحدة نختار عشوئيا.

- نحدد الخلية التي تحتوي على أقل تكلفة في الصف أو العمود الذي تم اختياره في الخطوة الثانية، ثم يتم مقارنة ما هو متوفر لذى مراكز الإنتاج مع ما يحتاجه مركز الاستلام، ثم نختار أقل الكميتين ونخصصها للخلية المختارة وبعد ذلك يحذف الصف أو العمود المقابل لأصغر الكميتين.

- إعادة الخطوات السابقة إلى أن يتم توزيع جميع الكميات المتوفرة في مراكز الإنتاج على مراكز الاستلام

ولتوضيح خطوات طريقة فوجل التقريبية سيتم الاعتماد على المثال السابق (التمرين رقم 23) كمايلي:

1- حساب الفرق بين أقل تكلفتين اعتمادا إلى البيانات في جدول النقل لشركة المصنعة لثلاجات، أي حساب الفرق بين أقل تكلفتين في كل صف:

- أقل تكلفتين في الصف الأول هما (10،12)، الفرق بينهما هو 2.
- أقل تكلفتين في الصف الثاني هما (16،18)، الفرق بينهما هو 2.
- أقل تكلفتين في الصف الثالث هما (11،14)، الفرق بينهما هو 3.

ومن ثم يتم حساب الفرق بين أقل تكلفتين في كل عمود:

- أقل تكلفتين في العمود الأول هما (10،14)، الفرق بينهما هو 2.
- أقل تكلفتين في العمود الثاني هما (12،22)، الفرق بينهما هو 10.
- أقل تكلفتين في العمود الثالث هما (11،16)، الفرق بينهما هو 5.

إن أكبر فرق في الجدول هو (10) ويعود إلى العمود الثاني ثم نحدد أصغر تكلفة في العمود الثاني هو ($C_{12}=12$)، تقع في الخلية (S_1, D_2)، لذلك نقارن بين ما هو متوفر لذى مركز الإنتاج (S_1)، مع ما يحتاجه مركز الاستلام (D_2)، ثم نختار أقل الكميتين ونخصصها للخلية (S_1, D_2)، ويحذف العمود الثاني.

$X_{12}= \text{Min}\ (40,30)=30$

والخطوة التالية هو حساب الفرق الجديد للجدول ويتم اختيار أكبر فرق (باستثناء العمود المحذوف)

2- حساب الفرق بين أقل تكلفتين في كل صف:

- أقل تكلفتين في الصف الأول هما (10،20)، الفرق بينهما هو 10.
- أقل تكلفتين في الصف الثاني هما (16،18)، الفرق بينهما هو 2.
- أقل تكلفتين في الصف الثالث هما (11،14)، الفرق بينهما هو 3.

ومن ثم يتم حساب الفرق بين أقل تكلفتين في كل عمود:

- أقل تكلفتين في العمود الأول هما (10،14)، الفرق بينهما هو 4.
- أقل تكلفتين في العمود الثالث هما (11،16)، الفرق بينهما هو 5.

إن أكبر فرق في الجدول هو (10) ويعود إلى الصف الأول ثم نحدد أصغر تكلفة في الصف الأول هو (C_{11}=10)، تقع في الخلية (D_1, S_1)، لذلك نقارن بين ما هو متوفر لذى مركز الإنتاج (S_1)، مع ما يحتاجه مركز الاستلام (D_1)، ثم نختار أقل الكميتين ونخصصها للخلية (D_1, S_1)، ويحذف الصف الأول.

X_{11}= Min (10,60)=10

وبعد ذلك يتم حساب الفرق الجديد للجدول ويتم اختيار أكبر فرق (باستثناء العمود الثاني والصف الأول المحذوفين)

3- حساب الفرق بين أقل تكلفتين في كل صف:

- أقل تكلفتين في الصف الثاني هما (16،18)، الفرق بينهما هو 2.
- أقل تكلفتين في الصف الثالث هما (11،14)، الفرق بينهما هو 3.

ومن ثم يتم حساب الفرق بين أقل تكلفتين في كل عمود:

- أقل تكلفتين في العمود الأول هما (18،14)، الفرق بينهما هو 4.
- أقل تكلفتين في العمود الثالث هما (11،16)، الفرق بينهما هو 5.

إن أكبر فرق في الجدول هو (5) ويعود إلى العمود الثاث، ثم نحدد أصغر تكلفة في العمود الثالث هو (C_{33}=11)، تقع في الخلية (S_3, D_3)، لذلك نقارن بين ما هو متوفر لذى مركز الإنتاج (S_3)، مع ما يحتاجه مركز الاستلام (D_3)، ثم نختار أقل الكميتين ونخصصها للخلية (S_3, D_3)، ويحذف الصف الأول.

X_{33}= Min (30,30)=30

وعندما يبقى مركز طلب واحد لم يستوفى احتياجاته تؤول إليه جميع الكميات المعروضة المتبقية دون الحاجة إلى إعادة حساب الفروق، لذا نلاحظ أنه لم يبقى سوى مركز الطلب الأول لم يستوفي احتياجاته لذا تؤول إليه جميع الكميات المعروضة المتبقية (40) وحدة من مركز الإنتاج الثاني و(10) وحدات من مركز الإنتاج الثالث. ويمكن توضيح خطوات السابقة حسب طريقة فوجل التقريبية في الجدول ادناه:

إلى / من	D_1	D_2	D_3	العرض
S_1	10 / 10	12 / 30	**20**	40
S_2	18 / 40	24	16	40
S_3	14 / 10	22	11 / 30	40
الطلب	60	30	30	120

إن الحل الأساسي هو:

X_{11}= 10 , X_{12}= 30, X_{21}= 40, X_{31}= 10, X_{33}= 30

عدد المتغيرات الأساسية (الخلايا الممتلئة) : M=3+3−1=5

واستنادا لما تقدم فإن التكلفة الأولية لعمليات النقل حسب طريقة فوجل التقريبية هي:

$$Minz = 10\times10 + 30\times12 + 40\times18 + 10\times14 + 30\times11 = 1650\ Da$$

2. تحسين الحل الابتدائي إلى الحل الأمثل

يمكن الوصول إلى الحل الأمثل عن طريق إجراء تحسين على الحل الأساسي بعدة طرق أهمها: طريقة المسار المتعرج (المسار المغلق)، وطريقة التوزيع المعدلة (عوامل الضرب).

1.2 طريقة المسار المتعرج (المسار المغلق أو الحجر المتنقل)

تقوم هذه الطريقة على أساس تقييم جميع الخلايا الفارغة (المتغيرات غير الأساسية)، ذلك لمعرفة مدى مساهمتها في تخفيض تكاليف النقل الكلية في حالة تحويلها إلى خلايا ممتلئة (متغيرات أساسية)، وتتم كالاتي[1]:

– لاختيار المتغير الداخل يتم اختيار الخلايا الفارغة (المتغيرات غير الأساسية)، في جدول الحل الأولي للنقل الذي تم الوصول إليه سابقا باستخدام إحدى الطرق السابقة.

– تتم عملية الاختيار عن طريق رسم مسار مغلق لكل خلية فارغة بتكوين المسار المغلق برسم خطوط مستقيمة (عمودية وأفقية) تكون نهايتها خلايا ممتلئة، ما عذا نقطة البداية والنهاية للمسار المغلق فتكون للخلية الفارغة.

– لتسهيل طريقة الحل تعطى إشارة موجب (+) وإشارة سالب (–) بالتعاقب للخلايا التي يمر فيها المسار المغلق، أما الخلايا الممتلئة التي لا يمر فيها المسار تبقى قيمتها دون تغيير ثم يتم حساب مدى التغير الحاصل في قيمة دالة الهدف.

– تحديد الخلية الفارغة (المتغير غير الأساسي) التي ستدخل الحل ذات أعلى مؤشر تحسين بإشارة سالبة(في حالة تساوي أكثر من خليتين نختار إحداها عشوائيا)، أما بالنسبة للخلية التي ستغادر الحل فإنها تمثل أصغر خلية ممتلئة في المسار المغلق بإشارة سالبة .

[1]- جهاد صياح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، فالح عبد القادر الحوري، مرجع سابق ذكره، ص.ص 163–170. بتصرف

– الخطوة التالية فهي إضافة قيمة المتغير الخارج من الحل إلى الخلايا التي تحمل إشارة موجب (+) وطرح قيمته من الخلايا التي تحمل إشارة سالب (–) ضمن نفس المسار، في حين تبقى قيم الخلايا الممتلئة الأخرى دون تغير.

– تكرر هذه العمليات إلى غاية الوصول إلى قيم جبرية للخلايا تكون موجبة أو مساوية للصفر و الذي يعني الوصول إلى الحل الأمثل.

باعتماد المثال في التمرين رقم 23 يتمثل الحل الأولي الأساسي لشركة المصنعة للثلاجات بطريقة التكلفة أقل كما هو مبين:

من \ إلى	D_1	D_2	D_3	العرض
S_1	10 40	12	**20**	40
S_2	18 10	24 30	16	40
S_3	14 10	22	11 30	40
الطلب	60	30	30	120

Minz= 10×40+ 18×10+ 24×30+ 14×10+ 11×30= 1770 Da

في البداية يجب التأكد من أن عدد الخلايا الممتلئة = عدد مراكز الإنتاج + عدد مراكز الاستلام –1

= 3+3–1= 5.

الخلايا الفارغة في الجدول هي: S_1D_2 (X_{12}), S_1D_3 (X_{13}), S_2D_3 (X_{23}), S_3D_2 (X_{32})

يتم اختبار أمثلية الحل عن طريق رسم مسار مغلق لكل خلية فارغة (متغير غير أساسي)، ونحسب مؤشر التحسين عند كل خلية فارغة.

المسار المغلق للخلية S_1D_2 (X_{12})

$S_1D_2 \longrightarrow S_2D_2 \longrightarrow S_2D_1 \longrightarrow S_1D_1 \longrightarrow S_1D_2$

نجد مؤشر التحسين: $+12-24+18-10= -4$

إلى / من	D_1	D_2	D_3	العرض
S_1	10 40 -	12 +	20	40
S_2	18 10 +	24 30 -	16	40
S_3	14 10	22	11 30	40
الطلب	60	30	30	120

المسار المغلق للخلية S_1D_3 (X_{13})

$S_1D_3 \longrightarrow S_3D_3 \longrightarrow S_3D_1 \longrightarrow S_1D_1 \longrightarrow S_1D_3$

نجد مؤشر التحسين: $+20-11+14-10= +13$

إلى / من	D_1	D_2	D_3	العرض
S_1	10 40 -	12	20 +	40
S_2	18 10	24 30	16	40
S_3	14 10 +	22	11 30 -	40
الطلب	60	30	30	120

المسار المغلق للخلية S_2D_3 (X_{23})

$S_2D_3 \longrightarrow S_3D_3 \longrightarrow S_3D_1 \longrightarrow S_2D_1$

نجد مؤشر التحسين: $+16-11+14-18=+1$

إلى / من	D_1	D_2	D_3	العرض
S_1	10 40	12	20	40
S_2	18 10 -	24 30	16 +	40
S_3	14 10 +	22	11 30 -	40
الطلب	60	30	30	120

المسار المغلق للخلية S_3D_2 (X_{32})

$S_3D_2 \longrightarrow S_3D_1 \longrightarrow S_2D_1 \longrightarrow S_2D_2$

نجد مؤشر التحسين: $+22-14+18-24= +2$

إلى / من	D_1	D_2	D_3	العرض
S_1	10 40	12	20	40
S_2	18 10 +	24 30 -	16	40
S_3	14 10 -	22 +	11 30	40
الطلب	60	30	30	120

وفيما يلي ملخص قيم مؤشر التحسين عند كل خلية فارغة:

$+12-24+18-10= -4$

$+20-11+14-10= +13$

$+16-11+14-18= +1$

$+22-14+18-24= +2$

يتم الوصول إلى الحل الأمثل عندما تكون جميع قيم مؤشر التحسين أكبر من أو تساوي الصفر(في حالة وجود مؤشر التحسين يساوي صفر فهذا يعني تعدد الحلول المثلى)، تبين النتائج أن الحل ليس أمثل حيث الخلية الفارغة التي ستدخل الحل(ذات اعلى مؤشر تحسين بإشارة سالبة) هي (S_1D_2)، وعليه المسار المغلق لهذه الخلية كالاتي:

$S_1D_2 \longrightarrow S_2D_2 \longrightarrow S_2D_1 \longrightarrow S_1D_1$

ونحدد الخلية التي ستغادر الحل الأساسي هي (S_2D_2)، (ذات أقل كمية منقولة ضمن المسار المغلق وتحمل إشارة سالبة)، وعليه قيم الخلايا الممتلئة بعد إجراء عملية النقل كمايلي:

$S_1D_2 \longrightarrow S_2D_2 \longrightarrow S_2D_1 \longrightarrow S_1D_1$

$30 \longrightarrow 0 \longrightarrow 40 \longrightarrow 10$

ويكون جدول النقل الثاني بعد إجراء التعديل السابق كالأتي:

إلى / من	D_1	D_2	D_3	العرض
S_1	10 / 10	12 / 30	**20**	40
S_2	18 / 40	24	16	40
S_3	14 / 10	22	11 / 30	40
الطلب	60	30	30	120

ويتم اختبار أمثلية الحل مرة أخرى عن طريق رسم المسار المغلق وإيجاد قيم مؤشرات التحسين للخلايا الفارغة (المتغيرات غير الأساسية)، كالأتي:

$S_1D_3\ (X_{13}) = S_1D_3 \longrightarrow S_3D_3 \longrightarrow S_3D_1 \longrightarrow S_1D_1$

$S_2D_2\ (X_{22}) = S_2D_2 \longrightarrow S_2D_1 \longrightarrow S_1D_1 \longrightarrow S_1D_2$

$S_2D_3\ (X_{23}) = S_2D_3 \longrightarrow S_3D_3 \longrightarrow S_3D_1 \longrightarrow S_2D_1$

$S_3D_2\ (X_{32}) = S_3D_2 \longrightarrow S_3D_1 \longrightarrow S_1D_1 \longrightarrow S_1D_2$

وفيما يلي قيم مؤشرات التحسين للخلايا الفارغة (متغير غير أساسي)

$S_1D_3 = +20-11+14-10 = +13$

$S_2D_2 = +24-18+10-12 = +4$

$S_2D_3 = +16-11+14-18 = +1$

$S_3D_2 = +22-14+10-12 = +6$

وبمأن جميع قيم مؤشرات التحسين للخلايا الفارغة موجبة مما يعني أنه الحل الأمثل. وتكون التكلفة الكلية عند الحل الأمثل:

$Minz = 10\times10 + 30\times12 + 40\times18 + 10\times14 + 30\times11 = 1650$ Da

وعليه تم تخفيض التكلفة من (1770 دج) في الحل الأساسي إلى (1650 دج) عن الحل الأمثل بفرق مقدراه (120 دج)، كما أنه يلاحظ أنها نفس النتيجة المتوصل إليها عند استخدام طريقة فوجل التقريبية.

2.2 طريقة التوزيع المعدلة (عوامل الضرب)

تتلخص خطوات هذه الطريقة في الخطوات التالية[1]:

- لكل صف في جدول النقل يتم وضع مقابل له (U_i)، ولكل عمود في جدول النقل يوضع به مقابل له (V_j).
- يتم تجزئة الخلايا الواردة في جدول النقل عند الحل الأولي الأساسي إلى خلايا ممتلئة (متغيرات أساسية)، وخلايا فارغة (متغيرات غير أساسية).

[1]- جهاد صياح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، فالح عبد القادر الحوري، مرجع سابق ذكره، ص.ص 170-174.

- لجميع الخلايا الممتلئة (متغيرات أساسية)، يتم وضع العلاقة الرياضية التالية: $U_1=0/U_I+V_j= C_{ij}$.
- يتم حساب التغير في الكلفة (مؤشر التحسين) لكل خلية فارغة (متغيرات غير أساسية)، وذلك وفق العلاقة التالية: $b_{ij}= C_{ij} - U_I-V_j$.
- يكون الحل أمثل إذا كانت جميع قيم (b_{ij})، أكبر من أو تساوي صفر، أما إذا كانت إحدى هذه القيم سالبة نختار هنا أعلى قيمة بإشارة سالبة ونرسم لها مسار مغلق (نجري عملية النقل حسب طريقة المسار المغلق)، حيث الفرق هنا يكمن في أن رسم المسار المغلق يكون فقط للخلية التي سوف تدخل إلى الحل وليس لجميع الخلايا الفارغة.

باعتماد المثال في التمرين رقم 23 يتمثل الحل الأولي الأساسي لشركة المصنعة للثلاجات بطريقة التكلفة أقل، يتم وضع لصف مقابل وضع مقابل له (U_i)، ولكل عمود مقابل له (V_j)، كمايلي:

1- تحديد الخلايا الممتلئة باستخدام العلاقة : $U_1=0/\ U_I+V_j= C_{ij}$.

$S_1D_1\ (X_{11}) = U_1 + V_1 \ \Rightarrow 10 = 0 + V_1 \ \Rightarrow \mathbf{V_1 = 10}$
$S_2D_1\ (X_{21}) = U_2 + V_1 \ \Rightarrow 18 = U_2 + 10 \Rightarrow \mathbf{U_2 = 8}$
$S_2D_2\ (X_{22}) = U_2 + V_2 \ \Rightarrow 24 = 8 + V_2 \Rightarrow \mathbf{V_2 = 16}$
$S_3D_1\ (X_{31}) = U_3 + V_1 \Rightarrow 14 = U_3 + 10 \Rightarrow \mathbf{U_3 = 4}$
$S_3D_3\ (X_{33}) = U_3 + V_3 \Rightarrow 11 = 4 + V_3 \Rightarrow \mathbf{V_3 = 7}$

2- يتم حساب التغير في التكلفة (مؤشر التحسين) لكل خلية فارغة وفق العلاقة: $b_{ij}= C_{ij} - U_I-V_j$

$S_1D_2\ (X_{12})\ b_{12} = C_{12} - U_1 - V_2 \Rightarrow b_{12} = 12 - 0 - 16 = -4$

$S_1D_3\ (X_{13})\ b_{13} = C_{13} - U_1 - V_3 \Rightarrow b_{13} = 20 - 0 - 7 = 13$

$S_2D_3\ (X_{23})\ b_{23} = C_{23} - U_2 - V_3 \Rightarrow b_{23} = 16 - 8 - 7 = 1$

$S_3D_2\ (X_{32})\ b_{32} = C_{32} - U_3 - V_2 \Rightarrow b_{32} = 22 - 4 - 16 = 2$

نلاحظ أن الخلية S_1D_2 كان مؤشر التحسين سالبا (الخلية الوحيدة السالبة)، لذلك فهي المتغير الداخل ويتم تنظيم المسار المغلق لها كما هو موضح أدناه:

إلى / من	D_1	D_2	D_3	العرض
S_1	10 40 -	12 +	20	40
S_2	18 10 +	24 30 -	16	40
S_3	14 10	22	11 30	40
الطلب	60	30	30	120

وعليه الحل الأمثل بعد إجراء عملية النقل مبين في الجدول أدناه:

إلى / من	D_1	D_2	D_3	العرض
S_1	10 10	12 30	20	40
S_2	18 40	24	16	40
S_3	14 10	22	11 30	40
الطلب	60	30	30	120

ولتأكد أن الحل أمثل يجب التأكد أن جميع قيم (b_{ij})، أكبر من أو تساوي صفر لذا يتم وضع لصف مقابل مقابل له (U_i)، ولكل عمود مقابل له (V_j)، ومن ثم يتم:

1- تحديد الخلايا الممتلئة باستخدام العلاقة : $U_i+V_j= C_{ij}$ /$U_1=0$.

$S_1D_1\ (X_{11}) = U_1 + V_1 \ \Rightarrow 10 = 0 + V_1 \ \Rightarrow \mathbf{V_1 = 10}$

$S_1D_2\ (X_{12}) = U_1 + V_2 \ \Rightarrow 12 = 0 + V_2 \ \Rightarrow \mathbf{V_2 = 12}$

$S_2D_1\ (X_{21}) = U_2 + V_1 \ \Rightarrow 18 = U_2 + 10 \ \Rightarrow \mathbf{V_2 = 8}$

$S_3D_1\ (X_{31}) = U_3 + V_1 \Rightarrow 14 = U_3 + 10 \Rightarrow \mathbf{U_3 = 4}$

$S_3D_3\ (X_{33}) = U_3 + V_3 \Rightarrow 11 = 4 + V_3 \Rightarrow \mathbf{V_3 = 7}$

2- يتم حساب التغير في التكلفة (مؤشر التحسين) لكل خلية فارغة وفق العلاقة: $b_{ij} = C_{ij} - U_I - V_j$

$S_1D_3\ (X_{13})\ b_{13} = C_{13} - U_1 - V_3 \Rightarrow b_{13} = 20 - 0 - 7 = 13$

$S_2D_2\ (X_{22})\ b_{22} = C_{22} - U_2 - V_2 \Rightarrow b_{22} = 24 - 8 - 12 = 4$

$S_2D_3\ (X_{23})\ b_{23} = C_{23} - U_2 - V_3 \Rightarrow b_{23} = 16 - 8 - 7 = 1$

$S_3D_2\ (X_{32})\ b_{32} = C_{32} - U_3 - V_2 \Rightarrow b_{32} = 22 - 4 - 12 = 6$

نلاحظ مما سبق أن كل قيم التغير في التكلفة (b_{ij})، للخلايا الفارغة (المتغيرات غير الأساسية)، هي قيم موجبة لذلك فإن الحل الذي تم التوصل إليه في الجدول الأخير هو الحل الأمثل، لذلك قيمة التكلفة الكلية عند الحل الأمثل:

$$Minz = 10\times10 + 30\times12 + 40\times18 + 10\times14 + 30\times11 = 1650 \text{ Da}$$

وكما يلاحظ أنها نفس النتيجة المتوصل إليها عند استخدام طريقة المسار المغلق.

3. حالات التعظيم في طريقة النقل

لا يقتصر في مسائل النقل على تقليل التكاليف فقط بل يمكن أن يستخدم أيضا لتعظيم الأرباح، وهنا يستوجب تعديل بعض المفاهيم حيث تختلف هذه الحالة عن سابقتها في[1]:

- اعتبار تكاليف النقل من وحدات الإنتاج إلى مراكز التسويق التي كانت في مصفوفة النقل السابقة أسعار بيع الكميات من الوحدات إلى المراكز.
- في طريقة أقل التكاليف كنا نبحث عن أقل التكاليف ونضع في المربع ذو التكلفة الأقل كل احتياجاته، بينما عندما نستهدف التعظيم نبحث عن أعلى رقم ونعطيه الأولوية باعتباره أعلى سعر ثم نتدرج لنأخذ الأسعار الأقل.
- في طريقة فوجل التقريبية بدلا من البحث عن أقل تكلفة نتجه إلى أعلى سعر والذي يليه.

[1]- عبد الرسول عبد الرزاق الموسوي، المدخل إلى بحوث العمليات، دار وائل للنشر والتوزيع، الطبعة الثالثة، 2009، ص.ص 121-126.

- عند التحقق من الحل الأولي للوصول إلى الحل الأمثل تعطى الأولوية للممر الحاصل على أعلى رقم موجب وليس سالب كما في أقل التكاليف، وبدلا من أن تطرح قيمة ذلك الممر تضاف إلى قيمة التوزيع الاولي.
- الوصول للحل الأمثل عندما تكون جميع القيم المتحصلة عليها أقل من أو يساوي الصفر.

التمرين رقم 25

فكر مستثمر في إقامة مشروع لإنتاج السيراميك تتوزع وحداته الإنتاجية ومراكز التوزيع والطاقة الإنتاجية والتكاليف في الجدول أدناه:

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
S_1	10	8	6	4	2000
S_2	14	17	5	2	1300
S_3	18	7	11	9	1700
b_i	1000	2000	140	120	5000 / 5000

المطلوب: تحديد أعلى العوائد باستخدام الطرق الأولية.

الحل

1- طريقة الزاوية الشمالية الغربية

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
S_1	10 1000	8 1000	6	4	2000
S_2	14	17 1000	5 300	2	1300
S_3	18	7	11 200	9 1500	1700
b_i	1000	2000	500	1500	5000 / 1500

قيمة دالة الهدف في هذه الحالة هي:

$$Z = 10\,(1000)+8\,(1000)+17\,(1000)+5\,(300)+11\,(200)+9\,(1500) = 52200$$

ولتحقق من الحل الأمثل باستخدام طريقة المسار المتعرج وبعد ما كانت كل القيم سالبة وصفرية تم التوصل إلى الحل الأمثل كما هو موضح في الجدول أدناه:

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
S_1	10	8 700	6 500	4 800	2000
S_2	14	17 1300	5	2	1300
S_3	18 1000	7	11	9 700	1700
b_i	1000	2000	500	1500	5000 / 1500

قيمة دالة الهدف في هذه الحالة هي:

$$Z = 8\,(700)+6\,(500)+4\,(800)+17\,(1300)+18\,(1000)+9\,(700) = 58200$$

2- طريقة اقل تكلفة ممكنة: بموجب هذه الطريقة تعطى الأولوية للمربع ذو القيمة العالية ثم يتم التدرج نزولا في الأسعار وبعد توزيع الكميات من وحدات الإنتاج إلى مراكز التوزيع كان الجدول كالأتي:

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
S_1	10	8 700	6	4 1300	2000
S_2	14	17 1300	5	2	1300
S_3	18 1000	7	11 500	9 200	1700
b_i	1000	2000	500	1500	5000 1500

قيمة دالة الهدف في هذه الحالة هي:

$$Z = 8\ (700)+4\ (1300)+17\ (1300)+18\ (1000)+11\ (500)\ +9\ (200) = 58200$$

وبعد التحقق بطريقة المسار المتعرج ظهر أن جميع القيم سالبة وصفرية وعليه تعتبر القيمة (58200)، هي أعلى إيراد نتج من هذا التوزيع وهي مماثلة لطريقة الزاوية الشمالية الغربية.

3- طريقة فوجل(VAM): في هذه الطريقة يتم حساب الفرق بين أكبر رقمين لكل سطر وعمود ويلي ذلك اختيار أكبر فرق، ليتم بعدها تحديد الخلية الكبرى، لذا كان توزيع الكميات على النحو الأتي:

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
S_1	10	8 700	6	4 1300	2000
S_2	14	17 1300	5	2	1300
S_3	18 1000	7	11 500	9 200	1700
b_i	1000	2000	500	1500	5000 1500

قيمة دالة الهدف في هذه الحالة هي:

$$Z = 8\,(700)+4\,(1300)+17\,(1300)+18\,(1000)+11\,(500)+9\,(200) = 58200$$

وبعد التحقق وجد أن القيم الناتجة من فحص الخلايا الفارغة أن جميعها سالبة وصفرية وفي هذه الحالة تصبح القيمة (58200)، هي القيمة المثلى وهي مساوية لما تم الحصول عليه في طريقتي أق التكاليف والزاوية الشمالية الغربية.

المحور الثالث: تمثيل مشكلة النقل بنظرية الشبكة[1]

إحدى التطبيقات الهامة لنظرية الشبكات تتجلى في تمثيل وحل مسائل المرور والنقل، فالمسألة التقليدية هي تنظيم عملية نقل البضائع بين المخازن ومحلات البيع وذلك من خلال تصريف أكبر عدد من الكميات المخزنة في عدة نقاط نحو عدد كبير من محطات الاستقبال.

1- البيان (الشبكة): لنفرض أنه لدينا n نقطة والمسماة رؤوس أو قمم والتي نرمز لها ب $x_1,x_2,\ldots.x_n$، أو (a,b,c..)، ونرمز ل X لمجموعة هذه النقاط : $X=\{x_1,x_2,\ldots.x_n\}$

وليكن U مجموعة الثنائيات $\{x_i,x_j\}$ التي يمكن تشكيلها انطلاقا من عناصر مجموعة X ، حيث بعض هذه العناصر يرتبط فيما بينها بخطوط تسمى أقواس أو بخطوط غير موجهة تسمى أضلع أو أحرف ويرمز لها ب $U_1,U_2,\ldots.U_k$ ، $U=\{U_1,U_2,\ldots.U_k\}$ ، ونقول أن المجموعتين X و U تشكلان بيان أو الشبكة (graph)، ويرمز له ب G حيث أن الرؤوس هي عناصر مجموعة X ، والأقواس عناصر مجموعة U حيث هذا البيان يعبر عنه كما يلي:

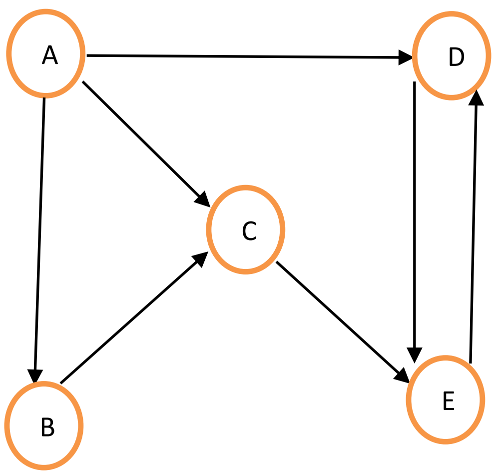
- المسار: هو تعاقب لأقواس متجاورة تمكننا من الانتقال بصورة مستمرة من قمة لأخرى ويتم التعبير عن المسار من خلال ذكر أقواسه أو الرؤوس التي تكونه القمم، أما طوله فهو عبارة عن عدد الأقواس التي يتكون منها.

[1]- بن سبع إلياس، استخدام نماذج البرمجة الخطية بالأهداف في نمذجة وحل مشاكل النقل- دراسة حالة شركة نفطال تلمسان- أطروحة دكتوراه منشورة- جامعة أبو بكر بلقايد تلمسان، 2019، ص.ص 147-153.

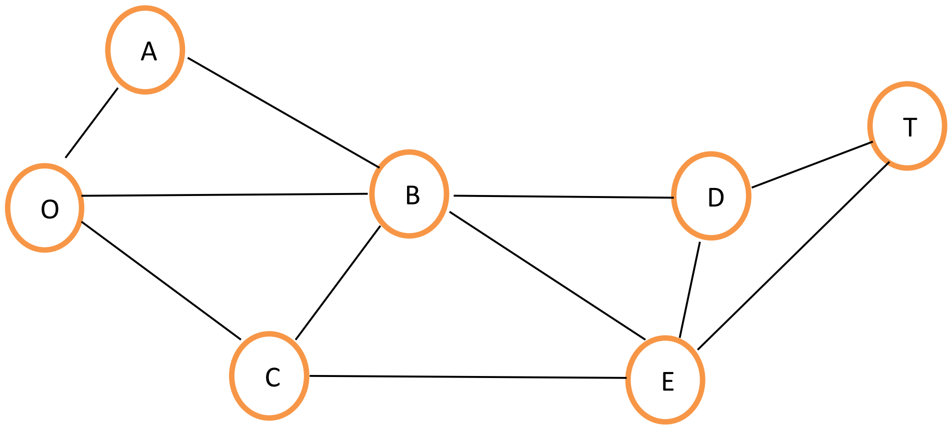
- سلسلة: السلسلة هي تتابع من الأحرف حيث أن الحرف يكافئ قوسين متعاكسين، إذ يكون الطرف النهائي لكل طرف هو الطرف الابتدائي للحرف الموالي باستثناء الطرف النهائي للحرف النهائي.
- بيان مقيم: نقول عن بيان أنه مقيم إذا كان لكل قوس موجود بالبيان قيمة عددية، حيث هذه الأخيرة تعبر عن العديد من الوقائع مثل: المسافة بين قمتين، قدرة التدفق بين القمتين، تكلفة النقل بين القمتين.

الشبكة الموجهة: هي هيكل يتكون من رؤوس تربطها أسهم موجهة، بمعنى أن السير فيها يخضع لاتجاه الأسهم، مثال: شبكة توزيع تتمثل في رؤوس في الرسم البياني هي A، B، C، D، E ، والرسم البياني به الأقواس (A ؛ B) ، (A ؛ C) ، (A ؛ D) ، (B ؛ C) ، (C ؛ E) ، (D ؛E) ، (E؛ D)[1].

شبكة التوزيع(شبكة موجهة)



الشبكة غير الموجهة: هي هيكل يتكون من رؤوس تربطها أسهم غير موجهة: مثال شبكة توزيع حيث لدينا الرؤوس O و A و B و C و D و E و T والحواف {O ؛ A} ، {O ؛ B} ، {O ؛ C} {A ؛ B} ، {A ؛ D} ،{B ؛ C} ، {B ؛ D} , {B ؛ E} , {D ؛ E} ،{D ؛ T} ،{E ؛ T} .



[1]- Fabian Bastin,Modèles de Recherche Opérationnelle, Université de Montréal,2010,P.P63-64.

2- تطبيقات نظرية الشبكات في حل مشاكل النقل

2-1 نظرية التدفق الأعظمي

إن نمذجة مشكلة التدفق الأعظمي في شبكة النقل تتطلب توضيح مفهومين هما:

- **التدفق في البيان أو الشبكة:** هو التدفق الممكن في البيان من مجموعة المنابع (وحدات إنتاجية مثلا)، إلى مجموعة المصبات (مخازن مثلا)، والذي نهدف إلى إيجاد أعظم قيمة له في البيان تحت قيد محدودية طاقة نقل الأقواس في البيان.
- **شبكة النقل:** نقصد بشبكة النقل كل بيان بدون دارة يحتوي على مدخل(قمة ابتدائية) تسمى على سبيل مثل (o)، ومخرج(قمة نهائية) تسمى (s)، حيث أن القمة (o)، تنطبق منها جميع الأقواس ولا يصل إليها أي قوس، بينما القمة (s)، تصل إليها الأقواس ولا ينطبق منها أي قوس، إذ يمكن أن تكون هذه الأقواس أنابيب لنقل المواد السائلة أو الغازية(ماء، بترول، غاز...)، كما يمكن أن تكون أسلاك ربط كهربائي أو هاتفي أو عبارة عن حمولة وسائل النقل المستخدمة (بواخر، طائرات، شاحنات أو غير ذلك..).

2-1-1 صياغة مشكلة التدفق الأعظمي

ليكن لدينا البيان الموجه والغير متماثل G(X,U) يحتوي على قمة n ، x_1 تمثل مدخل البيان والقمة x_n مخرج البيان، نرفق كل قوس $(X_i,X_j) \in U$، بالكمية الصحيحة وغير سالبة (C_{ij})، والتي تمثل قدرات هذا القوس، إذ يشكل لنا هذا البيان شبكة نقل مقيمة بقدرات مختلفة ونرمز لها ب T(X,U ,C) حيث نسمي تدفق في الشبكة T(X,U ,C) ، مجموع التدفقات غير السالبة (Q)، هذا التدفق يمكن أن يحقق في الشروط التالية:

- القيد (1) متعلق بتحقيق شروط عدم تجاوز قدرات الأقواس (X_i,X_j).
- القيد (2) متعلق بتحقيق قاعدة كيرشوف والمتمثلة في تساوي كمية التدفقات الداخلة إلى كل قمة مع كمية التدفقات التي تخرج منها، إضافة إلى شرط أن كمية التدفقات التي تخرج من القمة (X_1) مساوية لكمية التدفقات التي تدخل القمة (X_n).

تتمثل المشكلة في إيجاد أعظم تدفق في الشبكة $Q(Q)$، ويمكن صياغة هذه المشكلة في نموذج برمجة خطية وحلها بطريقة السمبلكس، غير أنه هناك طرق أكثر كفاءة وسهلة التطبيق مثل خوارزمية فورد فولكرسن.

2-1-2 البحث عن تدفق الأقل التكاليف

ليكن لدينا البيان $G(X,U)$ مقيم، بحيث نرفق كل قوس من هذا البيان بالعددين الحقيقيين C_{ij} و d_{ij}، على التوالي حيث:

C_{ij}: هي طاقة القوس (X_i,X_j).

d_{ij}: هي تكلفة الوحدوية لنقل السلع عبر القوس (X_i,X_j).

التكلفة الإجمالية لأي تدفق محقق (Q) يرمز لها ب $d(Q)$ وهي مجموع تكاليف التدفقات Q_{ij} عبر كل قوس (X_i,X_j).

نعتبر مجموعة من التدفقات (Q) التي لها نفس القيمة $\alpha(Q)$، نقول عن تدفق من هذه المجموعة أنه تدفق الأقل تكلفة إذا كان إجمالي تكاليف التدفقات المارة عبر أقواس هذا البيان أقل ما يمكن .

الفصل الثالث: مدخل للبرمجة غير الخطية بقيود أو دون قيود

يمكن تقسيم البرمجة غير الخطية إلى قسمين رئيسين هما البرمجة غير الخطية بمتغير واحد والبرمجة غير الخطية متعدد المتغيرات، وكذلك برمجة غير خطية غير مقيدة وبقيود، لذا سوف يتم التطرق من خلال هذا الفصل إلى أهم الطرق في حل برمجة الغير خطية.

المحور الأول: البرمجة غير الخطية بمتغير واحد[1]

وتكمن صياغة مسألة البرمجة غير الخطية بمتغير واحد على أنها تصغير أو تكبير للدالة:

$$Z= f(x)$$

[1]- أحمد علي أحمد رضوان، عبد الرحمن محمد سليمان أبو عمة، تقنيات الأمثلية في البرمجة غير الخطية، النشر العلمي والمطابع –جامعة الملك سعود، المملكة العربية السعودية، 2001، ص 65، ص.ص 77-83. بتصرف

حيث يكون البحث عن قيمة x التي تجعل الدالة $f(x)$ مثلى التي تجعلها أكبر أو أصغر ما يمكن، إذ يكون مجال البحث في مجموعة الأعداد الحقيقية R ، أي $(-\infty،\infty)$، بينما عند وضع قيد على متغير القرار x فإن المسألة تكون تصغير أو تكبير للدالة الهدف كالأتي: $Z= f(x)$

تحت القيد: $a \le x \le b$

1.1 البحث عن الأمثلية باستخدام المشتقات

1.1.1 طريقة تصنيف الفترة

نفترض تصغير دالة تفاضلية f على فترة مغلقة ومحددة حيث عند التكرار k تكون فترة عدم التأكد $[a_k , b_k]$,

وبفرض أن المشتقة $f\,'(x_k)$ معروفة، لذا يكون لدينا ثلاث حالات ممكنة التالية:

1- إذا كان $f\,'(x_k)=0$ فهذا يعني أن x_k هي نقطة التصغير.

2- إذا كان $f\,'(x_k)>0$ فإنه لقيم $x> x_k$ نحصل على $f\,'(x_k)(x- x_k)>0$ وهذا يؤدي إلى أن $f(x)>f(x_k)$ ، أي أن نقطة التصغير تقع على شمال x_k ، وبالتالي تكون فترة عدم التأكد الجديدة $[a_{k+1} , b_{k+1}]$, هي $[a_k , x_k]$.

3- إذا كان $f\,'(x_k)<0$ فإنه لقيم $x< x_k$ نحصل على $f\,'(x_k)(x- x_k)>0$ وهذا يؤدي إلى أن $f(x)>f(x_k)$ ، أي أن نقطة التصغير تقع على يمين x_k ، وبالتالي تكون فترة عدم التأكد الجديدة $[a_{k+1} , b_{k+1}]$, هي $[x_k , b_k]$.

وتتمثل خطوات هذه الطريقة فيما يلي:

- الخطوة الأولى نفترض أن $[a_1 , b_1]$ هي فترة عدم التأكد المبدئية وأن L هو طول الفترة النهائية المسموح بها، كذلك نفترض أن n أصغر عدد صحيح موجب بحيث أن:

  $K=1$ / $(\frac{1}{2})^n \le \frac{l}{(b1-a1)}$ ثم ننتقل إلى الخطوة الرئيسية.

- الخطوة الرئيسية حساب $x_k = \frac{(ak+bk)}{2}$ ثم حساب $f'(x_k)$ فإذا كانت $f'(x_k)=0$ عندها يتم توقف وتكون x_k هي الحل الأمثل، بينما إذا كانت $f'(x_k)>0$ يتم الانتقال إلى الخطوة 2 وأما إذا كانت $f'(x_k)<0$ يتم الانتقال إلى الخطوة 3.
- الخطوة 2 نضع $a_{k+1} = a_k$ ثم الانتقال إلى الخطوة 4.
- الخطوة 3 نضع $b_{k+1} = b_k$ ثم الانتقال إلى الخطوة 4.
- الخطوة 4 إذا كانت $k=n$ يتم التوقف والنقطة المثلى تقع في الفترة $[a_{n+1}, b_{n+1}]$، أما إذا كانت $k \neq n$، عندئذ نضع $k \leftarrow k+1$ وتكرر الخطوة 1.

التمرين رقم 25

أوجد قيمة المتغير x التي تأخذ عندها الدالة f(x) قيمتها الصغرى حيث أن:

$$f(x)= x^2+ 2x$$

تحت القيد: $-3 \leq x \leq 6$ وطول الفترة النهائية $L \leq 0.2$

الحل

بمأنه يتم الوصول إلى تصغير الفترة المبدئية إلى فترة طولها L حيث $L \leq 0.2$ وعليه فإن عدد التكرارات n الذي يحقق $0.0222 = \frac{0.2}{9} = \frac{0.02}{(6-(-3))} = \frac{l}{(b1-a1)} \leq (\frac{1}{2})^n$ هو n=6. ويمكن تلخيص الحسابات حسب طريقة التصنيف في الجدول أدناه:

التكرار K	a_k	b_k	x_k	$f'(x_k)$
1	−3.0000	6.0000	1.50000	5.0000
2	−3.0000	1.50000	−0.7500	0.5000
3	−3.0000	−0.7500	−1.8750	−1.7500
4	−1.8750	−0.7500	−1.3125	−0.6250
5	−1.3125	−0.7500	−1.0313	−0.0625
6	−1.0313	−0.7500	−0.8907	0.2186
7	−1.0313	−0.8907		

مشتقة الدالة $f'(x_k) = 2x+2$

- السطر 1: القيد $-3 \leq x \leq 6$ وعليه $a_k = -3.0000$ و $b_k = 6.0000$ إذا تكون فترة عدم التأكد $[b_k, a_k]$ أي $[6.0000 ، -3.0000]$.

$x_k = \frac{(ak+bk)}{2} = \frac{(6.0000+3.0000-)}{2} = 1.50000$ ويتم حساب باقي القيم في جميع الأسطر بنفس العلاقة.

ويتم حساب قيم المشتقة بالنسبة للسطر 1: $f'(x_k) = 2x+2 = 2(1.50000)+2 = 5.0000$

ويتم حساب قيم المشتقة بالنسبة لباقي الأسطر بنفس الطريقة.

نلاحظ أن $f'(x_k)>0$ وبالتالي تكون فترة عدم التأكد الجديدة هي $[x_k, a_k]$، أي $[1.50000 ، -3.0000]$.

السطر 4: نلاحظ أن $f'(x_k)<0$ في السطر 3 وبالتالي تكون فترة عدم التأكد الجديدة هي $[b_k, x_k]$، أي $[-1.8750 ، -0.7500]$. ونستمر بنفس الطريقة في باقي الحسابات في الجدول.

وعليه يلاحظ أن فترة عدم التأكد النهائية هي $[-1.0313، -0.8907]$ وتكون النقطة المثلى في المنتصف أي $x = -0.961$.

2.1.1 طريقة نيوتن

تستخدم طريقة نيوتن لتصغير دالة مستمرة وتفاضلية من الرتبة الثانية حيث يلاحظ أن التقريب التربيعي q حول النقطة x_k هو:

$$q(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \frac{1}{2} f''(x_k)(x - x_k)^2$$

وإذا أخذنا النقطة x_{k+1} هي النقطة التي تكون عندها مشتقة $q(x)$ تساوي الصفر، وهذا يؤدي إلى أن:

$$f'(x_k) + f''(x_k)(x_{k+1} - x_k) = 0$$

ومنها نحصل على المعادلة التكرارية التالية: $X_{k+1}= x_k - \frac{f'(xk)}{f''(xk)}$ بشرط أن يكون $f''(x_k) \neq 0$،

حيث يتم التوقف عن التكرار عندما تكون $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$ أو عندما $|f'(x_k)| < \varepsilon$ حيث $\varepsilon > 0$ عدد صغير محدد مسبقا.

التمرين رقم 26

لتكن الدالة f معرفة بالصيغة الأتية:

$$f(x)= \begin{cases} 4x^3 - 3x^4 & \text{if } x \geq 0 \\ 4x^3+3x^4 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

نقطة التقارب المبدئي $x_1=0.4$ و $\varepsilon = 0.0001$

الحل

نلاحظ أن الدالة f تفاضلية من الرتبة الثانية لكل قيم سوف نطبق طريقة نيوتن كما هو موضح في الجدول:

التكرار K	x_k	$f'(x_k)$	$f''(x_k)$	X_{k+1}
1	0.400000	1.152000	3.84000	0.100000
2	0.100000	0.108000	2.04000	0.047059
3	0.047059	0.025324	1.049692	0.022934
4	0.022934	0.006167	0.531481	0.011331
5	0.011331	0.001523	0.267322	0.005634
6	0.005634	0.000379	0.134073	0.002807

- السطر 1: $f'(x_k)= 12x^2 - 12x^3 = 12(0.4)^2 - 12(0.4)^3 = 1.152$

$$f''(x_k)= 24x - 36x^2 = 24(0.4) - 36(0.4)^2 = 3.84$$

$$X_{k+1}= x_k - \frac{f'(xk)}{f''(xk)} = 0.4 - \frac{1.152}{3.84} = 0.1$$

ويتم حساب باقي الجدول بنفس الطريقة

ونلاحظ من الجدول أن الحل هو$x^* = 0.002807$ لأنه تم التوقف عن التكرار (عند التكرار 6)، عندما تكون $\varepsilon > |x_{k+1} - x_k|$ أي عند $|0.002807 - 0.005634| < 0.0001$

2.1 البحث عن الأمثلية دون استخدام المشتقات

1.2.1 طريقة بحث فيبوناتشي

يستخدم بحث فيبوناتشي لتصغير دالة أحادية المنوال[1] معرفة على فترة محدودة ومغلقة بحيث يعطى تتابع فيبوناتشي للبحث الخطي بالمعادلة:

$$\begin{cases} F_{r+1} = F_r + F_{r-1} \quad r=1,2,3\ldots \\ F_0=F_1=1 \end{cases}$$

أي أن : $\{F_n\} = \{1,1,2,3,5,813,21,34,55\ \ldots\}$

حيث يتم الحصول على كل عدد في تتابع $\{F_n\}$ بإضافة العددين السابقين باستثناء العددين الأولين $F_0=F_1=$.

ويمكن تلخيص طريقة فيبوناتشي في الخطوات التالية[2]:

مرحلة الانطلاق: نختار الطول المسموح به لفترة عدم التأكد النهائية $L>0$ تقع خلالها النقطة المثلى، وكذلك مقدار صغير $\varepsilon>0$ ، حيث نفرض أن $[a_1, b_1]$ هي فترة عدم التأكد الابتدائية وL' طول الفترة الابتدائية وباختيار عدد التكرارات n بحيث أن:

$$\frac{1+2\varepsilon}{f_{n+1}} \leq \frac{L}{L'}$$

مرحلة 1: نفرض $a_1=a$ ، $b_1=b$ و $k=1$ ، $\Delta 1 = b_k - a_k$

مرحلة 2: إذا كان $\Delta 1 > \varepsilon$ نحسب :

$$x_k^g = a_k + \frac{F_{n-k}}{F_{n+2-k}}(b_k - a_k)$$

[1]- دالة أحادية المنوال لديها نقطة مثلى $x*$ نهاية صغرى في توفر شروط معينة.

[2]- RAMDANI Zoubir,Cours sur Optimisation non lin´eaire,Universit´e Mohamed El-Bachir El-Ibrahimi de Bordj-Bouararidj,Facult´e des math´ematiques et de l'informatique,2021. p.p 78-82.

و $x_k^d = a_k + \frac{F_{n+1-k}}{F_{n+2-k}} (b_k - a_k)$

ومن ثم حساب $f(x_k^g)$ و $f(x_k^d)$ ومن ثم :

– إذا كان $f(x_k^g) < f(x_k^d)$: $a_{k+1} = a_k$ و $b_{k+1} = x_k^d$

– إذا كانت $f(x_k^g) > f(x_k^d)$: $b_{k+1} = b_k$ و $a_{k+1} = x_k^g$

– إذا كان $f(x_k^g) = f(x_k^d)$: $a_{k+1} = x_k^g$ و $b_{k+1} = x_k^d$

ومن ثم نحسب $\Delta k = b_k + 1 - a_{k+1}$ و $k=k+1$

مرحلة 3: نتيجة $x^* \in | a_{k+1}, b_{k+1} |$

التمرين رقم 27

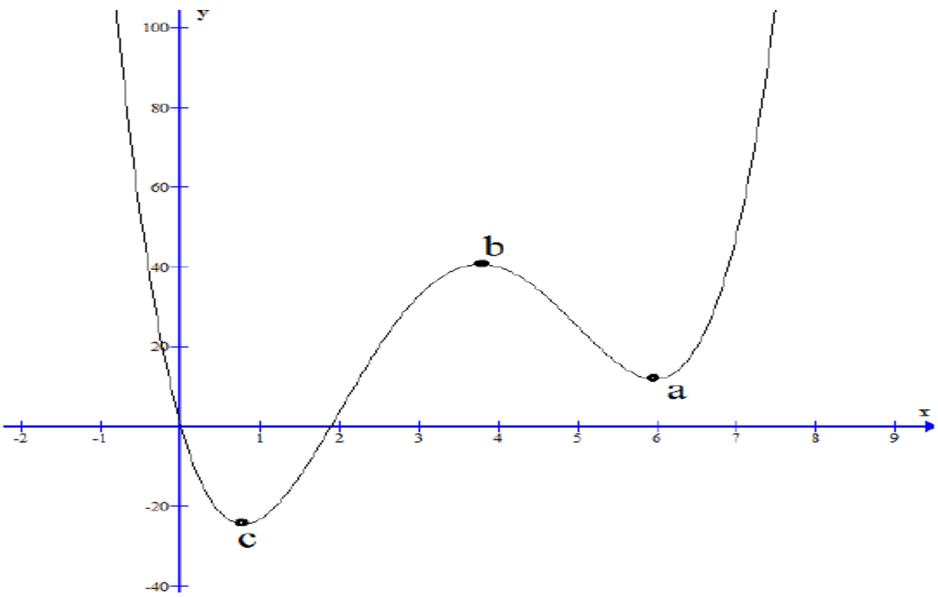
أوجد القيمة الصغرى للدالة:

$$F(x) = X^4 - 14x^3 + 60x^2 - 70x$$

في الفترة [0 , 2] مع طول فترة نهائية $L = 0.3$ و $\varepsilon = 0.1$

الحل

باعتبار أن الدالة أحادية المنوال في الفترة [0 , 2] كما هو موضح في الشكل أدناه:



عدد التكرارات N المطلوبة التي تحدد الطول المسموح به لفترة عدم التأكد النهائية أقل أو يساوي 0.3 والتي تقع خلالها النقطة المثلى كالاتي: $L = 0.3$ و $L' = 2-0=2$

$$\frac{1+2\varepsilon}{f n+1} \leq \frac{0.3}{2} = 0.15 \ \rightarrow \ F_{n+1} \leq \frac{1+2\varepsilon}{0.15}$$

$$F_{n+1} \leq \frac{1+2\times 0.1}{0.15} \ =8$$

وحسب جدول فيبوناتشي نجد أن N=4

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}
1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

عند k=1 نفرض $a_0=0$ et $b_0=2$ ونحسب x_1^g و x_1^d كالأتي:

$$x_1^g = a_0 + \frac{Fn-1}{F_{n+1}} (b_0 - a_0) = 0 + \frac{F4-1}{F_{4+1}} \ (2-0) = 0 + \frac{F3}{F5} \times 2$$

$$= \frac{3}{8} \times 2 = 0.7500$$

$$x_1^d = a_0 + \frac{Fn}{F_{n+1}} (b_0 - a_0) = 2\times \frac{F4}{F5} \ = 0 + 2\times\frac{5}{8} = 1.2500$$

ومن ثم حساب :

$$F(x_1^g) = F(0.7500) = -24.3398 \ / \ F(x_1^d) = F(1.2500) = -18.6523$$

وبمان : $f(x_k^g) < f(x_k^d)$: $a_{k+1}=a_k$ و $b_{k+1}= x_k^d$ وعليه تكون الفترة الجديدة: $| 0 \ , 1.2500|$

عند k=2 نفرض $a_1=0$ et $b_1=1.2500$ ونحسب x_2^g و x_2^d كالأتي:

$$x_2^g = a_1 + \frac{Fn-2}{F_n} (b_1 - a_1) = 0 + \frac{F2}{F4} \times 1.25 = 0 + \frac{2}{5} \times 1.25 = 0.50$$

$$x_2^d = a_1 + \frac{Fn-1}{F_n} (b_1 - a_1) = 0 + 1.25\times \frac{F3}{F5} \ = 0 + 1.25\times\frac{3}{8} = 0.75$$

ومن ثم حساب :

$$F(x_2^g) = F(0.5) = -21.6875 \ / \ F(x_2^d) = F(0.75) = -24.3398$$

وبمان : $f(x_k^g) > f(x_k^d)$: $b_{k+1}=b_k$ و $a_{k+1}= x_k^g$ وعليه تكون الفترة الجديدة: $| 0.5 \ , 1.2500|$

عند $k=3$ نفرض $a_2=0.5 \quad et \ b_2=1.2500$ ونحسب x_3^g و x_3^d كالأتي:

$$x_3^g = a_2 + \frac{Fn-3}{F_{n-1}} (b_2 - a_2) = 0.5 + \frac{F1}{F3} \times 1.25 = 0.5 + \frac{1}{3} \times 0.75 = 0.75$$

$$x_3^d = a_2 + \frac{Fn-2}{F_{n-1}} (b_2 - a_2) = 0.5 + 1.25 \times \frac{F2}{F3} = 0.5 + 0.75 \times \frac{2}{3} = 1$$

ومن ثم حساب :

$$F(x_3^g) = F(0.75) = -24.3398 \ / \ F(x_3^d) = F(1) = -23$$

وبمان : $f(x_k^g) < f(x_k^d)$: $a_{k+1}=a_k$ و $b_{k+1}= x_k^d$ وعليه تكون الفترة الجديدة: $|0.5 \ , \ 1|$

عند $k=4$ نفرض $a_3=0.5 \quad et \ b_3=1$ ونحسب x_4^g و x_4^d كالأتي:

$$x_4^g = a_3 + \frac{Fn-4}{F_{n-2}} (b_3 - a_3) = 0.5 + \frac{F0}{F2} \times 0.5 = 0.5 + \frac{1}{2} \times 0.5 = 0.75$$

$$x_4^d = a_3 + \frac{Fn-3}{F_{n-2}} (b_3 - a_3) = 0.5 + 0.5 \times \frac{F1}{F2} = 0.5 + 0.5 \times \frac{1}{2} = 0.75$$

ومن ثم حساب :

$$F(x_3^g) = F(x_3^d) = F(0.75) = -24.3398$$

وبمان : $f(x_k^g)=f(x_k^d)$: $a_{k+1}= x_k^g$ و $b_{k+1}= x_k^d$ وعليه الحل النهائي $x^* = 0.75$

المحور الثاني: البرمجة غير الخطية متعددة المتغيرات دون قيود

إن حل أي مسألة تصغير غير مقيدة يتعين إيجاد قيم مناسبة لمتغيرات : $x=\{x_1,.....x_n\}$ وذلك من أجل تصغير دالة الهدف $f(x)$.

ولتحديد الشروط الضرورية الكافية لإيجاد القيم المثلى (الصغرى أو العظمى)، لدالة متعددة المتغيرات تعتمد على نظريتين هما[1]:

- الشرط الضروري: إذا كانت جميع المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية معرفة للدالة $f(x)$، ولكي تكون النقطة $x=x^*$ ، نقطة طرفية (حدية) بجب أن يكون:

[1]- أحمد علي أحمد رضوان، عبد الرحمن محمد سليمان أبو عمة، مرجع سابق ذكره، ص.ص 86-93. بتصرف

$$\frac{\partial f}{\partial x1}\Big| = \frac{\partial f}{\partial x2}\Big| = \cdots = \frac{\partial f}{\partial xn} = 0$$

– الشرط الكافي: لكي تكون النقطة $x=x^*$ ، نقطة طرفية (حدية) هو أن تكون لمصفوفة المشتقات الجزئية الثانية، أي لمصفوفة هيس (Hessian Matrix)، محسوبة عند x^* إحدى الخاصيتين التاليتين:

1– مؤكدة الايجاب بحيث جميع محدداته الرئيسية الجزئية موجبة أي: $|H_1|\ ,|H_2|,|H_3|\ \ldots.|H_n| > 0$

عندها تكون x^* نقطة تصغير أي تحقق نهاية دنيا للدالة.

2– أو مؤكدة السلبية بحيث تتبادل جميع محدداته الرئيسية الجزئية الإشارة فيما بينها بين السلبية والإيجابية بدأ من الإشارة السالبة أي: $0 > |H_1|$ ، $0 < |H_2|$ ، $|H_3| < 0$ ، عندما تكون x^* نقطة تكبير أي تحقق نهاية عظمى لدالة.

التمرين رقم 28

أوجد النهاية الكبرى لدالة الهدف f إذا كانت:

$$F(x_1, x_2, x_3)= x_1-29\, x_2-26\, x_3- x_1\, x_2+ x_1x_3- x_2\, x_3- x_1^2- 3x_2^2- x_3^2$$

الحل

نقوم بحساب أولا:

$$\frac{\partial f}{\partial x1}= 1- x_2 + x_3 - 2x_1= 0\ldots\ldots(1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x2}= -29- x_1 - x_3 - 6x_2= 0\ldots..(2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x3}= -26+ x_1 - x_2 - 2x_3= 0\ldots\ldots(3)$$

وبحل المعادلات (1،2،3) نحصل على ما يلي:

$$x^*=(x_1^*, x_2^*, x_3^*)=(-7,-1,-16)$$

ومن ثم نحسب مصفوفة هس H_f المرتبطة بالدالة F هي:

$$H_f=\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x1\ \partial x2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x1\ \partial x3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x2\ \partial x1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x2\ \partial x3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x3\ \partial x1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x3\ \partial x2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 3} \end{bmatrix}$$

بالتعويض عن المشتقات نجد أن:

$$H_{f(x^*)} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -6 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

والمحددات الجزئية لهذه المحددة هي:

$$|-2| = -2\ ,\ \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -6 \end{vmatrix} = 11\ ,\ \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -6 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -12$$

أي أن إشارة المحددات الجزئية هي −، + ، − ، وبالتالي فإن $H_{f(x^*)}$ سالبة مؤكدة، مما يعني أن للدالة نهاية عظمى عند x^* وقيمتها $f(x^*)= 219$.

ملاحظة: قد تكون مصفوفة هس لبعض الدوال ذات المتغيرين $F(x_1, x_2)$ غير مؤكدة الإيجاب أو غير مؤكدة السلبية عند النقطة $x^*=(x_1^*, x_2^*)$ والتي يكون عندها: $\left|\frac{\partial f}{\partial x1}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial x2}\right| = 0$ ، في هذه الحالة تسمى النقطة $x^*=(x_1^*, x_2^*)$ نقطة السرج.

المحور الثالث: البرمجة غير الخطية متعددة المتغيرات بقيود

لحل البرمجة غير الخطية المقيدة بقيود معادلات أو متراجحة لإيجاد قيم المتغيرات $x=\{x_1,\ldots\ldots x_n\}$ التي

تصغر أو تكبر دالة الهدف : $z=f(x)$

وذلك تحت القيود: $g_j(x)\leq 0\ ,\ j=1,2,3\ldots\ldots,m$

أو $g_j(x) = 0\ ,\ j=1,2,3\ldots\ldots,m$

حيث أن قيمة m أقل من n أو تساويها و كل من m و n أعداد صحيحة موجبة، ففي حالة كون m=0 تصبح المسألة غير مقيدة، وتكون المسألة غير معرفة إذا كانت m أكبر منn . وسوف نتطرق لبعض الطرق لحل البرمجة غير الخطية المقيدة بقيود سواء معادلات أو متراجحة.

1.3 طريقة التعويض المباشر (قيود معادلات)

تعتبر هذه الطريقة من أبسط الطرق لحل البرمجة غير الخطية المقيدة بشروط المساواة ، حيث في هذه الطريقة نقوم بتخلص من n من المتغيرات بمساعدة m من معادلات القيود للتحول المسألة إلى مسألة غير مشروطة في عدد (n – m) من المتغيرات المستقلة، وبالتالي نحصل على قيم جميع المتغيرات التي تحقق الحل الأمثل. وسيتم شرح خطوات هذه الطريقة من خلال المثال الأتي [1]:

التمرين رقم 29

أوجد القيمة الصغرى للدالة:

$$F(x)= \frac{1}{2}\ (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

تحت الشروط:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \ \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \ldots\ldots\ 2 \end{cases}$$

الحل

تحوي المسألة على ثلاثة متغيرات وشرطين أي لدينا متغير مستقل ومتغيرين غير مستقلين، حيث من الشرط 1 نجد أن: $x_1 = x_2$

وعليه يمكن حذف المتغير x_1 أو x_2 من دالة الهدف والشرط 2.

بحذف x_2 تتحول المسألة إلى تصغير الدالة:

$$F(x_1, x_3)= \frac{1}{2}\ (2x_1^2 + x_3^2)$$

1- أحمد علي أحمد رضوان، عبد الرحمن محمد سليمان أبو عمة، مرجع سابق ذكره، ص.ص 133–140.

تحت شرط: $2x_1 + x_3 = 1 \quad ......3$

بحذف المتغير x_3 باستخدام الشرط 3 نجد أن:

$$x_3 = 1 - 2x_1$$

وعليه تصبح دالة الهدف كالأتي:

$$F(x_1)= \frac{1}{2} \quad (1-4x_1 +6x_1^2 \ )$$

وبالتالي أصبحت المسألة مسألة تصغير غير مشروطة تحتوي على متغير واحد.

وبذلك يكون الشرط الضروري لكي تكون الدالة $F(x_1)$ ، نقطة طرفية أو حدية بوضع مشتقة الدالة $F(x_1)$،

تساوي الصفر أي: $\frac{\partial f}{\partial x1} = \frac{1}{2} \quad (-4 +12x_1)=0$

من معادلة سابقة نجد أن: $x_1=\frac{1}{3}$ وبالتعويض في الشرطين 1 و 2 نجد أن : $x_2 = x_3 = \frac{1}{3}$

لذلك تكون النقطة الحدية $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$، ولمعرفة إذا كانت الدالة ما إذا كانت الدالة

$F(x_1)$، عند x_1^* نهاية صغرى أو نهاية كبرى نحسب $\frac{\partial 2f}{\partial x_1{}^2}$ أي حساب المشتقة الثانية عند x_1^* نجد أن:

$\frac{\partial 2f}{\partial x_1{}^2} = 6 > 0$ ، أي أن النقطة الحدية $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ نقطة نهاية صغرى للدالة $F(x_1, x_2, x_3)$.

2.3 طريقة مضاريب لاغرانج بقيود معادلات

حسب هذه الطريقة يتم إضافة متغير واحد مناضر لكل قيد أي أنه إذا كان للمسألة الأصلية n من المتغيرات وm من معادلات القيود، عندها يصبح العدد النهائي للمجاهيل (n+m)، ولكي تكون لهذه الدالة نهاية عظمى أو صغرى x^* يجب أن يتوفر شرطين هما[1]:

- الشرط الضروري: أن تكون المشتقات الجزئية الأولى لدالة لاغرانج L تساوي الصفر حيث :

$$L = (x_1, x_2, x_3, \ldots. x_n \ldots\ldots \lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_n)$$

- الشرط الكافي: لمعرفة إذا كان هذا الحل يمثل فعلا نهاية صغرى أو كبرى نقوم بإيجاد عناصر المحدد:

[1]- أحمد علي أحمد رضوان، عبد الرحمن محمد سليمان أبو عمة، مرجع سابق ذكره، ص.ص 165-

$$\begin{vmatrix} (L_{11}-z) & L_{12} & L_{13}\ldots\ldots L_{1n} & g_{11} & g_{21}\ldots\ldots g_{m1} \\ L_{21} & (L_{22}-z) & L_{23}\ldots\ldots L_{2n} & g_{12} & g_{22}\ldots\ldots g_{m2} \\ L_{n1} & L_{n2} & L_{n3}\ldots(L_{nn}-z) & g_{1n} & g_{2n}\ldots\ldots g_{mn} \\ \vdots & & & & \\ g_{11} & g_{12} & g_{13}\ldots g_{1n} & 0 & 0 \quad 0 \\ g_{21} & g_{22} & g_{23}\ldots g_{2n} & 0 & 0 \quad 0 \\ \vdots & & & & \\ g_{m1} & g_{m2} & g_{m3}\ldots g_{mn} & 0 & 0 \quad 0 \end{vmatrix}$$

ويجب أن يكون هنا كل جدر z لكثيرة الحدود موجبا (نهاية صغرى) وسالبا (نهاية عظمى)، أما إذا كانت بعض الجدور للمعادلة سالبا والبعض الأخر موجب فالنقطة x^* ليست نقطة حدية. وسيتم شرح خطوات هذه الطريقة من خلال المثال الأتي:

التمرين رقم 30

أوجد القيمة الصغرى للدالة:

$$F(x)= \frac{1}{2}\ (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

تحت الشروط:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \ldots\ldots \ldots\ldots\ldots & 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0 \ldots\ldots & 2 \end{cases}$$

الحل

نكون دالة لاغرانج لهذه المسألة كالأتي:

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = f(x_1, x_2, x_3) + \lambda_1\, g(x_1, x_2) + \lambda_2\, g(x_1, x_2, x_3)$$

$$= \frac{1}{2}\ (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \lambda_1 (x_1 - x_2) + \lambda_2 (x_1 + x_2 + x_3 - 1)$$

فإن الشروط الضرورية لتصغير الدالة تعطى بالعلاقات التالية:

$$\frac{\partial L}{\partial x1} = x_1 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x2} = x_2 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \ldots\ldots\ldots(2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x3} = x_3 + \lambda_2 \qquad = 0 \ldots\ldots\ldots(3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda 1} = x_1 - x_2 \qquad = 0 \ldots\ldots.(4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda 2} = x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0 \ldots.(5)$$

بحل المعادلات نجد أن:

$$x^* = x^* = x^* = \frac{1}{3} \quad , \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{3}$$

لذلك تكون أصغر قيمة للدالة عند النقطة $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = x^*$ ، هي $F(x^*) = \frac{1}{6}$

لمعرفة إذا كان هذا الحل يمثل فعلا نهاية صغرى للدالة F نطبق الشرط الكافي بإيجاد عناصر المحدد:

$$L_{11} = \frac{\partial^2 l}{\partial x^2 1} = 1 \;;\; L_{12} = \frac{\partial^2 l}{\partial x1\ \partial x2} = 0 \;;\; L_{13} = \frac{\partial^2 l}{\partial x1\ \partial x3} = 0$$

$$L_{11} = \frac{\partial^2 l}{\partial x2\ \partial x1} = 0 \;;\; L_{22} = \frac{\partial^2 l}{\partial x^2 2} = 1 \;;\; L_{23} = \frac{\partial^2 l}{\partial x2\ \partial x3} = 0$$

$$L_{31} = \frac{\partial^2 l}{\partial x3\ \partial x1} = 0 \;;\; L_{32} = \frac{\partial^2 l}{\partial x3\ \partial x2} = 0 \;;\; L_{33} = \frac{\partial^2 l}{\partial x^2 3} = 1$$

$$g_{11} = \frac{\partial g1}{\partial x1} = 1 \;;\; g_{12} = \frac{\partial g1}{\partial x2} = -1 \;;\; g_{13} = \frac{\partial g1}{\partial x3} = 0$$

$$g_{21} = \frac{\partial g2}{\partial x1} = 1 \;;\; g_{22} = \frac{\partial g2}{\partial x2} = 1 \;;\; g_{33} = \frac{\partial g2}{\partial x3} = 1$$

وبالتالي تأخذ المحددة الصيغة الأتية:

$$\begin{vmatrix} 1-z & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1-z & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-z & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

وبفك المحدد في الطرف الأيسر نحصل على : $1-z=0$ أي $z=1$، وحيث أن قيمة z موجبة فإن النقطة $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$، نهاية حدية صغرى للدالة.

3.3 طريقة مضاريب لاغرانج بقيود متراجحات

تستخدم هذه الطريقة في المسائل البسيطة بالقيود المتراجحة حيث نعرف أولا متغيرا متمما μ_j لذا تأخذ دالة لاغرانج الصيغة الأتية:

$$L(x, \lambda,\mu)=f(x)+\sum_{j=1}^{m} \lambda j \left(g_j(x)- {}^2\mu_j\right)$$

بتطبيق شروط لاغرانج الضرورية وهي:

$$1)\ \frac{\partial l}{\partial x1} = \frac{\partial f}{\partial x1} + \sum_{j=1}^{m} \lambda j \frac{\partial gj}{\partial x1} = 0\,, i = 1,2,\dots n \ \ / \ \ g_j(x^*)= (\mu_j)2$$

$$2)\ \frac{\partial l}{\partial \lambda j} = g_j(x)- \mu^2=0\ , \ j= 1,\dots\dots m$$

$$3)\ \frac{\partial l}{\partial \mu j} = -2\ \lambda j\ \mu_j =0\ , \ j=1,2\dots.m$$

من معادلة (3) نحصل على $\lambda_j^*=0$ أو $\mu_j^*=0$ أو $\lambda_j^*= \mu_j^* = 0$ ، وعليه يترتب عن ذلك 3 حالات كالاتي[1]:

الحالة 1: إذا كان $\lambda_j^*= 0$ و $\mu_j^*\neq 0$ مما يعني أنه تم تجاهل القيود $g_j(x^*) \geq 0$ ، وعليه فإن الحل الأمثل لا يتغير بوجود هذا القيد إذا كانت كل $\lambda_j^*= 0$ لجميع قيم $(j=1,2\dots.m)$، أي حل غير مقيد.

الحالة 2: إذا كان $\lambda_j^*\neq 0$ و $\mu_j^*=0$ ، مما يعني $g_j(x^*) = 0$ وعليه يقع الحل الأمثل على حدود القيد رقم j، حيث $\lambda_j^*\neq 0$ فإن الحل الأمثل لا يحقق الشرط الضروري $\nabla f(x^*) = 0$

الحالة 3: إذا كان $\lambda_j^*= 0$ و $\mu_j^*=0$ ، لكل قيم j، فإن $g_j(x^*) = 0$ وعليه يحقق الحل الأمثل العلاقة $\nabla f(x^*) = 0$ أي أن الحل الأمثل يقع على النقطة الحدية للقيود.

[1]- أحمد علي أحمد رضوان، عبد الرحمن محمد سليمان أبو عمة، مرجع سابق ذكره، ص.ص 187-190.

التمرين رقم 31

أوجد النهايات العظمى والصغرى لدالة الهدف:

$$F(x_1,x_2)= 2x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_1$$

تحت القيد: $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$

الحل

نعرف $\mu^2 = 1 - x_1^2 - x_2^2$ / μ عدد حقيقي وعليه تكون دالة لاغرانج كالأتي:

$$L(x_1, x_2, \lambda, \mu) = 2x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_1 + \lambda_1 (x_1 - x_2) + \lambda_2 (x_1 + x_2 + x_3 - 1)$$

وشروط لاغرانج الضرورية:

$$\frac{\partial L}{\partial x1} = 4x_1 - 2 + 2\lambda x_1 = 0 \ldots\ldots..(1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x2} = -6x_2 + 2\lambda x_2 = 0 \ldots\ldots..(2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \mu^2 - 1 + x_1^2 + x_2^2 = 0 \ldots\ldots..(3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = 2\mu\lambda = 0 \ldots\ldots.(4)$$

ونميز فيما يلي الحالات كالأتي:

- إذا كان $\mu_j^* = 0$ (حل مقيد) عندئذ تصبح شروط لاغرانج بالصيغة:

$$4x_1 - 2 + 2\lambda x_1 = 0$$

$$x_2 (2\lambda - 6) = 0$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 1$$

من معادلة الثانية وبفرض $x_2 \neq 0$ فنحصل على $\lambda = 3$ ، ومن المعادلة الأولى نجد أن $x_1 = 0.2$ ، ومن المعادلة الثالثة نجد $x_2 = \pm\sqrt{0.96}$، وبذلك نكون قد تم الحصول على حلين للمعادلة.

وبفرض $x_2=0$ في معادلة الثالثة نجد $x_1=\pm 1$ وعليه نحصل على القيمتين المناظرتين للمتغير λ من المعادلة الأولى. أي أن الحلول لمجموعة المعادلات السابقة:

$x_1^* = 0.2$, $x_2^* = \pm\sqrt{0.96}$, $\lambda^* = 3$ $f(x_1^*, x_2^*) = -3.2$

$x_1^* = 1$, $x_2^* = 0$, $\lambda^* = -1$ $f(x_1^*, x_2^*) = 0$

$x_1^* = -1$, $x_2^* = 0$, $\lambda^* = -3$ $f(x_1^*, x_2^*) = 4$

- إذا كان $\lambda = 0$ (حل غير مقيد) عندها نحصل على :

$$4x_1 - 2 = 0$$

$$-6\,x_2 = 0$$

$$1 + x_1^2 + x_2^2 = \mu^2$$

ويكون حل هذه المعادلات هو:

$x_1^* = 0.5$, $x_2^* = 0$, $\mu^2 = 1.25$ $f(x_1^*, x_2^*) = -0.5$

مما سبق نلاحظ أن النهاية الصغرى للدالة $F(x_1,x_2)$ تتحقق عند النقطة ($0.2, \pm\sqrt{0.96}$) , وتكون قيمتها 3.2−، والنهاية أو القيمة العظمى عند (1,0−)، والتي تناظر قيمة للدالة مقدارها 4.

قائمة المراجع

أولا: المراجع باللغة العربية

الكتب

1. عفاف علي حسن الدش، بحوث العمليات واتخاذ القرارات: الأساليب–التطبيق–أستخدم الحزم الرياضية، مكتبة عين شمس، الجزء الأول، ط2 ،2012.
2. محمد راتول، بحوث العمليات، ديوان المطبوعات الجامعية، الطبعة الثانية، الجزائر، 2006.
3. أحمد حاتم عبد الله، بحوث العمليات، الجامعة الافتراضية السورية، سوريا، 2018.
4. دلال صادق الجواد، حميد ناصر الفتال، بحوث العمليات، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، الأردن، 2008.
5. سهيلة عبد االله السعيد، الجديد في الأساليب الكمية وبحوث العمليات، الطبعة الأولى، دار الحامد للنشر والتوزيع، الأردن ، 2008.
6. حسين محمود الجنابي، الأحدث في بحوث العمليات، دار الحامد للنشر والتوزيع، الأردن، 2010.
7. حامد سعد نور الشمرتي، علي خليل الزبيدي، مدخل إلى بحوث العمليات، دار مجدلاوي للنشر والتوزيع، الطبعة الأولى، الأردن، 2007.
8. جهاد صياح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، فالح عبد القادر الحوري، بحوث العمليات والأساليب الكمية –نظرية وتطبيق–، دار جليس الزمان للنشر والتوزيع، 2008.
9. بوقرة رابح، بحوث العمليات، مؤسسة شباب الجامعة، الإسكندرية، 2009.
10. أبو القاسم مسعود الشيخ، بحوث العمليات، المجموعة العربية للتدريب والنشر، الطبعة الثانية، مصر، 2009.
11. عبد الرسول عبد الرزاق الموسوي، المدخل إلى بحوث العمليات، دار وائل للنشر والتوزيع، الطبعة الثالثة، 2009.
12. بن سبع إلياس، استخدام نماذج البرمجة الخطية بالأهداف في نمذجة وحل مشاكل النقل– دراسة حالة شركة نفطال تلمسان– أطروحة دكتوراه منشورة–جامعة أبو بكر بلقايد تلمسان، 2019.
13. أحمد علي أحمد رضوان، عبد الرحمن محمد سليمان أبو عمة، تقنيات الأمثلية في البرمجة غير الخطية، النشر العلمي والمطابع –جامعة الملك سعود، المملكة العربية السعودية، 2001.

المراجع باللغة الأجنبية:

الكتب

1- Fabian Bastin,Modèles de Recherche Opérationnelle, Université de Montréal,2010

2- RAMDANI Zoubir,Cours sur Optimisation non lin´eaire,Universit´e Mohamed El-Bachir El-Ibrahimi de Bordj-Bouararidj,Facult´e des math´ematiques et de l'informatique,2021.