الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة باجي مختار عنابة

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

قـــــسم العلوم الإقتصادية

مطبوعة بيداغوجية تحت عنوان

محاضرات في رياضيات المؤسسة

مطبوعة مقدمة لطلبة السنة الثانية علوم اقتصادية

من إعداد:

د. أمال خدادمية

السنة الجامعية: 2021 - 2022

بسم الله الرحمن الرحيم

﴿وَلَا تَهِنُوا وَلَا تَحْزَنُوا وَأَنْتُمُ الْأَعْلَوْنَ إِنْ كُنْتُمْ مُؤْمِنِينَ﴾

[سورة آل عمران الآية 139]

فهرس المحتويات

فــــــهرس المـــحتويات

مـــــقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

رياضيات المؤسسة هي فرع من فروع علم الرياضيات التطبيقية تهتم باستخدام أساليب التحليل الكمي لمساعدة الإدارة في اتخاذ القرارات حول المشاكل التي تواجهها مع الاعتماد بالدرجة الأولى على الرياضيات المتقدمة.

يعد الاستخدام المباشر للأرقام والعلاقات الرياضية والأساليب والأدوات الكمية حلقة الوصل في هذا المدخل التي تأتي ضمن ما يسمى برياضيات المؤسسة وذلك لتفسير مشكلات كثيرة في أدارة الاعمال فالمدخل الكمي يعتمد على الارقام والعلاقات الرياضية **(المعادلات والمتباينات)** والنماذج الرياضية أساسا لتوضيح المشكلة في حين تعتمد المداخل الاخرى لدراسة أدارة الاعمال على الادارة والوصف والتحليل استنادا الى أساليب البحث والاستبيان.

وتتضح اهمية رياضيات المؤسسة في كونها مدخلا كميا لدراسة المشاكل الادارية في الواقع العملي لمنظمة الأعمال ، وتسهم في تقريب المشكلة الادارية الى الواقع بموجب صيغ علمية مبسطة ونماذج رياضية معينة تظهر مكونات المشكلة ضمن أطر من التفكير العلمي المنظم والعقلاني , كما ان رياضيات المؤسسة تقوم بعرض النماذج في مجموعة علاقات رياضية بالشكل الذي يوضح الفرص المختلفة (البدائل) لعملية اتخاذ القرار وبما يسهم في تفسير عناصر المشكلة والعوامل المؤثرة فيها , كذلك تقوم بتعميم المعايير القياسية والمثالية لاتخاذ القرارات وذلك من خلال اتباع عدة خطوات وهي

1. تعريف المشكلة قيد الدرس
2. صياغة النموذج الملائم للمشكلة .
3. حل النموذج .

4. اختبار النموذج والحل الناتج منه .

5. وضع الحل على الواقع (تطبيق الحل)

لذلك جاءت هذه المطبوعة موجهة بالخصوص لطلبة السنة الثانية شعبة العلوم الاقتصادية ولجميع شعب ميدان العلوم التجارية، والتسيير معدة لتغطية محاور مقرر مادة رياضيات المؤسسة التي تعتبر مادة من مواد السداسي الثالث ضمن الوحدة االستكشافية، حيث تم تقسيم هذه المطبوعة إلى سبعة فصول .

الفصل الأول

مفهوم البرمجة الخطية

الفصل الأول: مفهوم البرمجة الخطية

البرمجة الخطية هي تقنية رياضية تبحث عن حل أو حلول لمشكلة اقتصادية سواء كانت إنتاجية، مالية، مسألة نقل، تحليل المشاريع، مباريات إلخ... واختيار أفضل حل من بين الحلول الممكنة والذي يمثل الحل الأمثل[1]. هذه التقنية الرياضية تستعمل خاصة من طرف المسيرين والمشرفين على المشاريع المختلفة لإيجاد الطريقة المثلى لتخصيص موارد المؤسسة المحدودة لاستخدامات مختلفة من أجل تحقيق هدف معين.

وهناك عدة أنواع من القيود نذكر منها على سبيل المثال لا الحصر

- ✓ قيود خاصة بالعملية الإنتاجية؛
- ✓ قيود خاصة بعملية التخزين؛
- ✓ قيود خاصة بعملية التسويق.

وعلى ضوء هذه القيود، فإن الحل الأمثل الذي يبحث عنه المسير باستعمال تقنيات البرمجة الخطية، هو ذلك الحل الذي يحدد له، كمية الإنتاج الواجب إنتاجها من كل نوع من المنتجات والتي تمكن المؤسسة من تحقيق أقصى ربح ممكن أو تقليل التكاليف إلى حدها الأدنى .

أولا: **صياغة مسألة البرمجة الخطية**

البرمجة الخطية هي اسلوب رياضي حديث يستخدم كأداة لإيجاد **(أفضل استعمال)** للموارد المحددة للمنشأة وكلمة **البرمجة** تعني استعمال الاسلوب لإيجاد البرامج المختلفة لاستعمال الموارد المحددة

[1]- جلال إبراهيم العبد،(2014): **استخدام الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية**، دار الجامعة الجديدة، الإسكندرية، مصر، ص 44

لدى المنشأة في ظل عدد من القيود. أما **الخطية** فتعني أن العلاقة بين متغيرات المشكلة هي علاقة خطية[1].

عند حل النموذج في رياضيات المؤسسة يكون هنالك دائما السعي لإيجاد الحل الامثل لأنه توجد عدة أنواع من الحلول للمشكلة وهي[2] :

4 **الحل المتاح (Feasible Solution)**: وهو الحل الذي يمكن الوصول إليه في أي مجموعة من المعادلات .

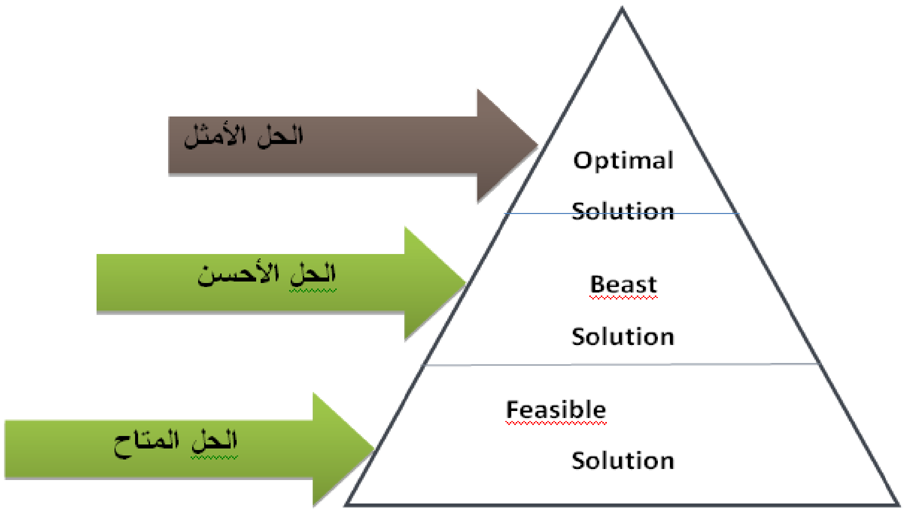
2- الحل الاحسن (Beast Solution) : هو الحل الذي يمكن الحصول عليه بعد إيجاد الحل في الحالة الأولى وهو يحقق كافة القيود .

3-الحل الأمثل (Optimal Solution) : وهو الحل الذي يمكن الوصول إليه بعد إيجاد الحل الأفضل الذي يحقق كافة القيود. وكما موضح في الشكل التالي:

[1] – علي حازم اليامور،(2009) : **استخدام نموذج البرمجة الخطية في تحديد المزيج الإنتاجي الأمثل الذي يعظم الأرباح في ظل تطبيق نظرية القيود**، ورقة بحثية مقدمة للمؤتمر العلمي الثاني للرياضيات، الإحصاء و المعلوماتية، 6-7 ديسمبر ، كلية علوم الحاسبات و الرياضيات، جامعة الموصل، العراق، ص 629 .

[2] – محمد راتول،(2006) : **بحوث العمليات**، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، الطبعة الثانية، ص 25.

الشكل رقم (1):أنواع حلول المشكلة



Yves Noobert , (1995) : Roch Ouellet .Réges Parent , **La recherche opérationnelle** ,gaitan morin éditeur ,p170..

حتى نتمكن من وضع برنامج خطي للمعطيات الاقتصادية أو الإدارية أو وضع صيغة رياضية لمسألة البرمجة الخطية، فإنه يجب توفر مجموعة من المتغيرات لها علاقة مباشرة بقيمة الهدف المراد تحقيقه ويحددها السؤال الذي نريد الإجابة عليه عند حل المسألة، وبصفة عامة فإن مسائل البرمجة الخطية تتكون من : مجموعة من المتغيرات، مجموعة معادلات أو متراجحات خطية وتسمى بالقيود، وكذا دالة تسمى بدالة الهدف .مع توفر شرط عدم السلبية .

ثانيا– فرضيات إستخدام البرمجة الخطية .

تعتمد نماذج البرمجة الخطية على مجموعة من الفرضيات, حيث ذكرنا فيما سبق أنه عند إستخدام البرمجة الخطية في مجال الأعمال فإننا ننظر إليها بإعتبارها أسلوبا رياضيا لتوزيع أو إستخدام موارد محدودة على عدد من الإستخدامات البديلة ,بالطريقة التي تحقق أفضل إستخدام ممكن لها ممثلا في

شكل هدف محدود , هذا ما يبين لنا أن البرمجة الخطية تستند إلى مجموعة من الأفكار الرئيسية و التي تعتبر أساسا لتفهم التقنية , نلخصها في فكرتين هما فكرة النشاط(Activity) , و فكرة البدائل (Alternatives) , و يقصد بفكرة النشاط في مجال الأعمال تلك الطريقة التي يمكن أن يتم الإنتاج بها بينما يقصد بفكرة البدائل في هذا الصدد تلك الوسائل المختلفة التي يمكن أن تؤدي كل منها إلى تحقيق الهدف المحدد, و في هذه الحالة تقوم البرمجة الخطية في أساسها النظري على خمسة إفتراضات رئيسية علمية , الواجب توفرها في المشكلة حتى نستطيع حلها بواسطة البرمجة الخطية يمكن تلخيصها كما يلي:[1]

4 فرضية التأكد التام (Certainty):

تعبر هذه الفرضية عن توفر عنصر التأكد , أي إن كافة عناصر المشكلة محدودة ومؤكدة , يمكن القول إذا أن تقنية البرمجة الخطية تقتصر في تطبيقها على تلك المشاكل التي تتضمن إتخاذ القرار في ظل التأكد التام, فالشخص القائم بتعريف المشكلة لا تواجهه عملية التنبؤ أو التخمين حيث أنه يفترض العلم التام بالظروف و العلاقات التي سوف تسود في المستقبل, هذا ما يتنافى مع حالة عدم التأكد الذي يميز الحياة العملية ,و منه يجب أن تكون الأرقام الموجودة في دالة الهدف (مساهمات العوامل) و المحددات أو القيود (إحتياجات العوامل و المصادر المتوفرة) معروفة وثابتة و غير قابلة للتغيير أثناء فترة معالجة المشكلة موضوع البحث .

[1] –اسماعيل السيد(1999): **بعض الطرق الكمية في مجال الأعمال** , الدار الجامعية للطبع و التوزيع الاسكندرية، ص10.

2- التناسبية (Proportionatity):

و يعني ذلك أن كل نشاط قد يعتبر مستقلا عن الآخر , ذلك أن معيار الإنجاز هو حاصل جمع المساهمات العوامل المختلفة , كذلك فإن الكميات التي يتم إستخدامها من الموارد المختلفة تتناسب مع إحتياجات العوامل المختلفة من كل من هذه الموارد.

فعلى سبيل المثال إذا كنا نحتاج إلى وحدتين من المواد الأولية لإنتاج وحدة واحدة تامة من منتج معين , فإننا نحتاج إلى أربعين وحدة من المواد الأولية لإنتاج عشرين وحدة من هذا المنتج, و هذا الإفتراض هو أساس إفتراض الإضافية .

3- الإضافية (Additivity):

ويعني هذا الافتراض أنه لا يوجد تداخل بين الفعاليات أو الأنشطة المختلفة , وبناء على ذلك فإن هذا الإفتراض يتضمن ما معناه أنه لو أخذنا مستويات أو جوانب النشاط $(X_1,X_2,\dots\dots X_n)$, فإن الإستعمال الكلي و لكل مصدر و كذلك معيار الإنجاز الكلي الناتج عن هذه الأنشطة , يساوي مجموع الكميات المتولدة أو الناجمة عن كل النشاطات الفردية, و بشكل مستقل , فإذا كنا ننتج أربعة منتجات و كان الربح الناجم عن بيع وحدة واحدة من كل من هذه المنتجات هو : 25،20،10، 30 وحدات نقدية على التوالي , فإن إجمالي الربح الناجم عن إنتاج و بيع ثلاث وحدات من كل منتج هو 3(30+25+20+10) = 255 وحدات نقدية.

4- قابلية القسمة أو الكسرية (Divisibility or Fractionality)

و المقصود هنا أن الحل لمشكلة البرمجة الخطية ليس بالضرورة أن يكون بأعداد صحيحة , و هذا يعني قبول كسور كقيم لعوامل القرار , و إذا كان من الصعب إنتاج أجزاء من المنتج فعند ذلك نلجأ إلى إستخدام البرمجة بالأعداد الصحيحة أو الرقمية Integer Programming .

5- اللاسلبية (Non-negativity) :

وهذا يعني أن قيم عوامل أو متغيرات القرار يجب أن تكون موجبة(غير سالبة) أو معدومة , فالقيم السالبة للكميات المادية حالة مستحيلة , فعلى سبيل المثال لا نستطيع إنتاج عدد سالب من الكراسي أو القمصان أو ....

خلاصة القول أنه توجد خمسة فرضيات أساسية يقوم عليها نموذج البرمجة الخطية في الحياة العملية , لذلك أجريت الدراسات للتخفيض من حدة الفروض , سوف نتناولها عند التطرق إلى الإنتقادات والصعوبات تطبيق نموذج البرمجة الخطية .

ثالثا- شروط إستخدام البرمجة الخطية.

لكي يمكن إستخدام البرمجة الخطية فإن هناك شروط يجب توفرها في المشكلة المراد علاجها وهي[1]:

- ينبغي إستخدامها في حالة ندرة الموارد , فلو كانت الموارد متوفرة تماما لما كانت هناك مشكلة فهذه الندرة تمثل أحد أهم القيود التي تخضع لها الإدارة في سعيها لتحقيق الهدف و هي تشكل قيود تربط

[1]- علي السلمي ، (1975) : الأساليب الكمية في الإدارة , القاهرة ,ص.60.

المتغيرات الداخلة في دالة الهدف ببعضها البعض, و تكون على شكل متباينات و معادلات و تسمى هذه بالقيود الهيكلية (Structural Constraints).[2]

- يجب أن يكون هناك هدف محدد و معبر عنه بطريقة كمية , كما يجب أن يكون الهدف واضحا و دقيقا بحيث يمكن أن يتخذ شكل معادلة رياضية , وعادة ما يكون الهدف تحقيق أقصى أرباح ممكنة أو تخفيض التكاليف لأقل حد ممكن.
- يفترض أن تكون هناك بدائل مختلفة لتحقيق الهدف , فيجب أن تكون هناك أساليب علمية لمزج الموارد للوصول إلى الهدف حيث يكون لكل بديل عائد متوقع , فتصبح المهمة إختيار البديل الذي يعطي أعلى عائد في حدود القيود المفروضة .
- يفترض أن تكون العلاقات بين المتغيرات التي تتركب منها المشكلة خطية , ويقصد بذلك أن أي تغير ما في أحد المتغيرات يحدث تغيرا مناسبا تماما مع المتغير الآخر.
- أن توجد قيود على المتغيرات الداخلة في دالة الهدف و القيود الهيكلية تستبعد منها القيم السالبة.

رابعا–صياغة الشكل العام للبرنامج الخطي وطرق حله.

4 صياغة الشكل العام :

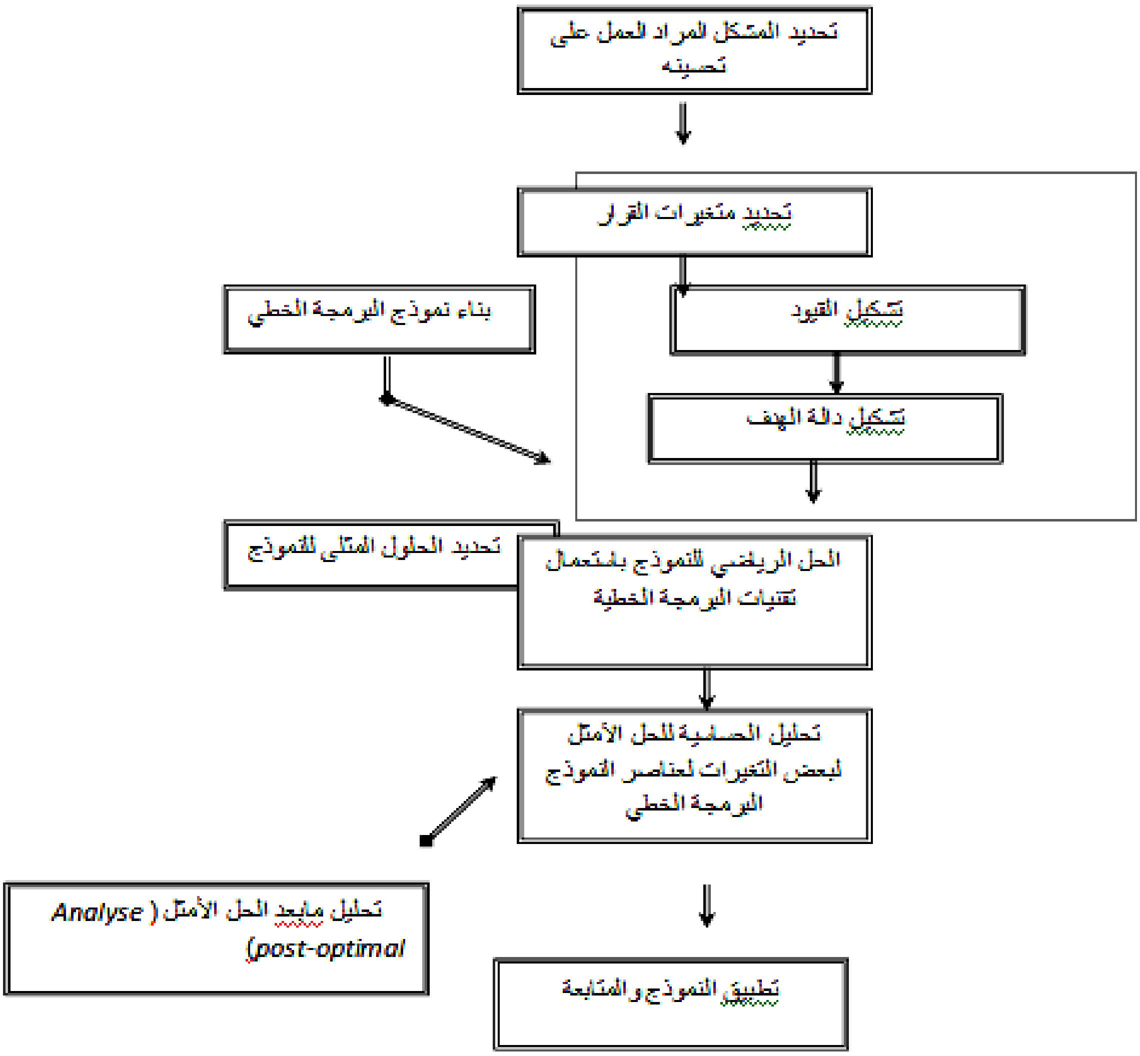
تستخدم البرمجة الخطية لإيجاد أفضل توزيع للموارد والإمكانات المحدودة على الإستخدامات المختلفة لتحقيق هدف معين **كتعظيم الربح أو الإنتاج** أو **تخفيض التكاليف** في ظل قيود وعوامل ثابتة , حيث

---

[2] - محمد توفيق ماضي، (1992) ، سلسلة الأساليب الكمية للجميع " البرمجة الخطية التوزيع الأمثل للموارد المحدودة , "المكتب العربي الحديث , الإسكندرية 1992 , م ص09 .

تصاغ المشكلة الإقتصادية وتكتب على شكل علاقات رياضية خطية , أي معادلات من الدرجة الأولى[1] , والشكل رقم (2) يوضح بإختصار خطوات النمذجة و الحل لنموذج البرمجة الخطي .

الشكل رقم (2) " طريقة النمذجة و التحليل في البرمجة الخطية ".



– Gérald .Baillageon,(1996)**Programmation Linéaire Appliquée Outil D'aide A La Décision**,canada,édition SMG,1996 ,p 06.

[1] - عبد الستار أحمد محمد الآلوسي، (2003) : **أساليب بحوث العمليات (الطرق الكمية المساعدة في اتخاذ القرار**، دار القلم للنشر، الإمارات العربية المتحدة ، ص 2.

الشكل رقم (2) يمثل تلخيص خطوات اتخاذ القرار باستخدام البرمجة الخطية , وتكون البداية ببناء النموذج الرياضي للمسالة من البيانات المجمعة من الواقع الفعلي ، وهذا يستدعي تحديد الهدف المطلوب تحقيقه وتعريف جميع المتغيرات التي تأثر فيه وذلك من خلال النظام ككل

- ثم فحص ودراسة الحلول البديلة المتاحة وتطوير عمليات نظامية لعلاجها والوصول إلى الهدف المطلوب تحقيقه .

- و أخيرا تطوير الحل للوصول إلى الحل الأمثل

2- عناصر نموذج البرمجة الخطيـة:

يتكون نموذج البرمجة الخطية من العناصر الأساسية التالية[1]:

2-1) المتغيرات.

وتسمى متغيرات القرار ، بتحديد قيمها نصل إلى الهدف المنشود أكبر ربح أو أقل تكلفة للمسألة المدروسة, و يشترط أن تكون غير سالبة , تخضع هذه المتغيرات لنوع معين من القياس , أي يعبر عنها بصورة كمية, ونرمز لهذه المتغيرات بـ

$$X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, X_n$$

حيث n عدد المتغيرات في المسألة المدروسة .

هذه المتغيرات تعبر عن أحد المفاهيم التالية :

- كميات إنتاج لمنتجات معينة .
- ساعات عمل في أقسام معينة من مصنع أو شركة أو مؤسسة .

[1] –ابراهيم موى عبد الفتاح ،(2006):مقدمة في بحوث العمليات (نماذج وتطبيقات)،المكتبة العلمية ، كلية التجارة جامعة الزقازيق ،مصر ،ص 6 .

- مبالغ من المال المخصص لأنشطة أو فعاليات معينة .
- مقدار من القطع الأجنبي المخصص لإستراد أصناف من السلع .
- كميات من المواد منقولة على طريق معينة , أو بوسائل نقل معينة .
- كمية المواد الأولية اللازمة لتصنيع منتج معين .

2-2) دالة الهدف :

هي دالة رياضية تمثل الهدف الذي نريد الوصول إليه وتحقيقه، كتحقيق أكبر ربح أو أدنى تكلفة ممكنة ويكون الشكل العام لهذه الدالة كما يلي[1] :

$$Z = C_1X_1 + C_2X_2 + ... + C_nX_n$$

أي بالشكل المختصر.

$$Z = \sum_{J=1}^{n} C_J X_J$$

حيث C_J أعداد حقيقية تدعى بمعاملات مساهمة المتغيرات في دالة الهدف , و تصنف الأهداف التي تعالجها البرمجة الخطية إلى مجموعتين :

المجموعة الأولى: تحتوي على حالة التعظيم لدالة الهدف كأن نسعى إلى تحقيق أكبر ربح ممكن أو توفير أعظمي للوقت و الجهد أو زيادة الدخل القومي إلى أقصى حد ممكن , وسنرمز لدالة الهدف بحرف كبير Z و هدفها يكون MAX أي:

$$Z = C_1X_1 + C_2X_2 + ... + C_nX_n \rightarrow MAX$$

أي بالشكل المختصر.

$$Z = \sum_{J=1}^{n} C_J X_J \rightarrow MAX$$

[1] – الستار أحمد محمد الآلوسي، **مرجع سبق ذكره**، ص 26 .

ونكتب أيضا $\max(z) = c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3......c_nx_n$

حيث X_J : متغيرات القرار.و C_J الربح الوحدوي لـ X_J .

مثال : تنتج مؤسسة "الوفاء" نوعين من المناديل الورقية (بيضاء ، ملونة) تباع المناديل البيضاء بـ10 دج بينما تباع المناديل الملونة بـ15 دج

صياغة دالة الهدف يكون كالأتي :

نرمز لكمية المناديل البيضاء بـ x_1

نرمز لكمية للمناديل الملونة بـ x_2

وعليه تكون دالة الهدف كما يلي: $\max(z) = 10x_1+15x_2$

المجموعة الثانية : تدنية دالة الهدف كأن نسعى إلى تخفيض التكاليف إلى أدنى حد ممكن , أو تقليل الخسائر قدر الإمكان , و تكتب دالة الهدف كالتالي:

أي بالشكل المختصر.

$$Z = \sum_{J=1}^{n} C_J X_J \rightarrow MIN$$

حيث X_J : متغيرات القرار.و C_J التكلفة الوحدوية لـ X_J

أو بصيغة أخرى : $\text{Min } (z) = c_1x_1+c_2x_2 +.........c_nx_n$

وبذلك تتكون دالة الهدف من المتغيرات التي تشير مثلا إلى المنتجات المختلفة التي يمكن إنتاجها ، على أن يكون المعامل الخاص بكل متغير هو ربح الوحدة الواحدة من المنتجات في دالة تعظيم الربح ، أو يكون عبارة عن تكلفة الوحدة الواحدة في حالة تخفيض دالة التكلفة .

مثال : تسعى مؤسسة الامل إلى تخفيض تكاليفها من انتاج نوعين من الزرابي كبيرة الحجم و صغيرة الحجم حيث يقدر الحد الأنى للنوع الأول بـ 350 دج بينما يقدر النوع الثاني بـ150 دج

نرمز لكمية النوع الاول من الزرابي بـ x_1

نرمز لكمية النوع الثاني من الزرابي بـ x_2

وعليه تكون دالة الهدف كما يلي :

Min (z) = $350x_1+150x_2$

2-3) القيود

هي عبارة عن وجود علاقة تأثير بين المتغيرات ، ويعبر عنها رياضيا بمتباينات تدعى الشروط الخطية , وتأخذ الأشكال التالية :

- **الشكل الأول :** $i = 1,2,..........,m.$ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$

إذا كانت دالة الهدف من نوع تعظيم *MAX*

- **الشكل الثاني :** $i = 1,2,..........,m.$ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$

إذا كانت دالة الهدف من نوع تدنية *MIN*

ومنه الشكل الأول و الثاني يطلق عليه الشكل القانوني(Forme Canonique) لنموذج البرمجة الخطية.

- **الشكل الثالث :** $i = 1,2,..........,m.$ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$

سواء كانت دالة الهدف تعظيم *MAX* أو تدنية *MIN* .

الشكل الثالث يطلق عليه الشكل المعياري (Forme Standard) لنموذج البرمجة الخطية .

- **الشكل الرابع :**

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{Bmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{Bmatrix} b_i \qquad\qquad i = 1,2,.........., m.$$

سواء كانت دالة الهدف **تعظيم** ***MAX*** أو **تدنية** ***MIN*** .

الشكل الرابع يطلق عليه الشكل المختلط **(Forme Mixte)** لنموذج البرمجة الخطية . حيث أنه في كلا الأشكال :

n : عدد المتغيرات في النموذج الخطي.

M : عدد قيود المسألة (عدد الشروط الخطية).

A_{ij} : أعداد حقيقية (معاملات) .

b_i : أعداد حقيقية تعبر عن الموارد المتاحة أو المتطلبات اللازمة لكل قيد من قيود المشكلة و يجب أن تكون موجبة .

2-4) شرط عدم السلبية :

يشترط على المتغيرات أن تكون غير سالبة أي $x_j \geq 0$ وهذا ما يجب فرضه على جميع النماذج لأنها جميعها تعبر عن كميات إنتاج , و الكميات لايمكن أن تكون سالبة.

تمرين توضيحي عن الشكل الأول :

مصنع للألمنيوم ينتج نوعين من الألمنيوم النوع الأول يستغرق 6 ساعات للصهر و3 ساعات للتكوّر وساعة قطع ،النوع الثاني يستغرق ساعتين للصهرو5 ساعات للتكور و4 ساعات للقطع ، ويتوفر في المصنع 36 ساعة للصهر و30 ساعة للتكور و20 ساعة للقطع ،هامش الربح 10 و ن للنوع الاول ، و 8 و ن للنوع الثاني

المطلوب :

1. صياغة نموذج البرمجة الخطية

الحـــــــل

نرمز للنوع الأول بـ X_1

نرمز للنوع الثاني بـ $X2$

المنتجات / الأقسام	X_1	$X2$	الطاقة التشغيلية
قسم الصهر	6	2	36
قسم التكور	3	5	30
قسم القطع	1	4	20
الأسعار	10 و ن	8 و ن	

صياغة النموذج :

$$\begin{cases} Max\ Z = 10X_1 + 8X_2 & \leftarrow \text{دالة الهدف} \\ 6X_1 + 2X_2 \le 36 & \leftarrow \text{قيد قسم الصهر} \\ 3X_1 + 5X_2 \le 30 & \leftarrow \text{قيد قسم التكور} \\ 1X_1 + 4X_2 \le 20 & \leftarrow \text{قيد قسم القطع} \\ X1, X2 \ge 0 & \leftarrow \text{شرط عدم السلبية} \end{cases}$$

تمرين توضيحي عن الشكل الثاني

يريد" مركز الأمل للتسويق " الإعلان لزبائنه عن توفر المشروبات الساخنة والمأكولات الخفيفة في جميع فروعه، ويريد أن يصل الإعلان إلى 60 ألف رجل و 40 ألف امرأة على الأقل في مدينة عنابة مستخدما في ذلك الصحف والإذاعة المحلية ، وقد توقع أن يصل الإعلان في الصحيفة إلى 6 آلاف رجل و ألفين امرأة وأن يصل الإعلان في الإذاعة إلى ألفين رجل و 4 آلاف امرأة. وتبلغ تكلفة الإعلان في الصحيفة 450 دينار جزائري للمرة الواحدة وفي الإذاعة 260 دينار جزائري .

المطلوب : - صياغة نموذج البرمجة الخطية الذي يحقق أقل التكاليف ؟

الحـــل :

الهدف هنا هو تحقيق أقل التكاليف أي Min (z)

أفترض أن x_1 = عدد الإعلانات في الصحيفة

X_2= عدد الإعلانات في الإذاعة

وتصبح دالة الهدف أوجد أقل تكلفة طبقا للآتي :

$$\min (z) = 450\, x_1 + 360\, X_2$$

$$s/c \begin{cases} 6\, x_1 + 2\, X_2 \geq 60 \\ 2\, x_1 + 4\, X_2 \geq 40 \\ x_1 ،\ X_2 \geq 0 \end{cases}$$

تمرين توضيحي عن الشكل الثالث

تسى احدى منظمات الاعمال المتخصصة بانتاج الاجهزة الكهربائية باقتراح خطة لانتاج نوعين من المنتجات (A,B) وذلك من خلال استغلال الطاقة التشغيلية المتاحة لثلاثة انواع من المكائن . يحتاج المنتج A ست ساعات على الماكنة الأولى وثلاث ساعات على الماكنة الثانية وساعتان على الماكنة الثالثة في حين يحتاج المنتج B اربع ساعات على الماكنة الأولى وخمس ساعات على الماكنة الثانية وثلاث ساعات على الماكنة الثالثة علما بان عدد الساعات التشغيلية المتاحة اسبوعيا مساوية تماما لـ 60 ساعة للماكنة الأولى و50 ساعة للماكنة لثانية و70 ساعة للماكنة الثالثة. وان الربح المتوقع من بيع الوحدة الواحدة من المنتج A هو 800 دج والربح المتوقع من بيع الوحدة الواحدة من المنتج B بـ 100 دج

المطلوب: صياغة نموذج البرمجة الخطية لانتاج عدد الوحدات من كلا المنتجين بما يحقق للمنظمة اكبر قدر ممكن من الارباح.

الحـل :

نفرض X_1 يمثل عدد الوحدات المنتجة من المنتج. A

نفرض X_2 يمثل عدد الوحدات المنتجة من المنتج. B

كتابة نموذج البرمجة الخطية كالاتي :

$$Max.\ Z = 800X_1+100X_2$$ دالة الهدف

$$\begin{cases} 6X1+4X2 = 60 \\ 3X1+5X2 = 50 \\ 2X1+3X2 = 70 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

قيد الماكنة الاولى

قيد الماكنة الثانية

قيد الماكنة الثالثة

تمرين توضيحي عن الشكل الرابع

تقوم شركة "DIAMON" بإنتاج ثلاثة أنواع من الألبسة (رجالي – نسائي – أطفال) حيث أن إنتاج هذه الأنواع يمر بثلاثة أقسام إنتاجية موضحة في الجدول الموالي :

المنتجات(الالبسة) / العمليات	لباس رجالي	لباس نسائي	لباس أطفال	الطاقة الإنتاجية
قسم الغزل	1 ألف دينار	2 ألف دينار	3 ألاف دينار	80 تماما
قسم النسيج	2 ألف دينار	1 ألف دينار	1 ألف دينار	59 على الأقل
قسم التجهيز والتعبئة	3 ألاف دينار	5 ألاف دينار	4 ألاف دينار	120 على الأكثر
الربح الوحدوي	10 ألاف دينار	12 ألف دينار	6 ألاف دينار	

***ملاحظة :الوحدة النقدية ألف دينار**

*المطلوب:

1. صياغة نموذج البرمجة الخطية

الحل :

الهدف الذي تسعى الى تحقيقه المؤسسة هو التعظيم max(z) حيث ورد في التمرين "عبارة الربح الوحدوي "

كلمة تماما تعني الاشارة (=)

كلمة على الأقل تعني الاشارة (≥) أكبر أو يساوي

كلمة على الأكثر تعني الاشارة (≤) أصغر أو يساوي

وعليه نمودج البرمجة الخطية كما يلي

نرمز للباس الرجالي بـ X_1

نرمز للباس النسائي بـ X_2

نرمز للباس الأطفال بـ X_3

$$\text{Max } Z = 10X_1 + 12X_2 + 6X_3$$

$$\begin{cases} 1X_1 + 2X_2 + 3X_3 = 80 & \longleftarrow \text{قيد قسم الغزل} \\ 2X_1 + 1X_2 + 1X_3 \geq 59 & \longleftarrow \text{قيد قسم النسيج} \\ 3X_1 + 5X_2 + 4X_3 \leq 120 & \longleftarrow \text{قيد قسم التجهيز و التعبئة} \\ X1, X2, X_3 \geq 0 & \longleftarrow \text{شرط عدم السلبية} \end{cases}$$

تمارينات للحل

تمرين 01:

ينتج مصنع " Middle East Paints" نوعين من الدهانات (دهانات خارجية و دهانات داخلية) ، و لانتاج كل نوع من أنواع هذه الدهانات يتم مزج مادتين أساسييتين من المواد الخام M_1 و M_2 ولا تستطيع إدارة المصنع تأمين أكثر من 10 أطنان يوميا من المادة M_1 و 12 طن يوميا من المادة M_2 ، و لانتاج طن واحد يوميا من الدهان الخارجي يتم مزج طن واحد من المادة M_1 و طنّين من المادة M_2 ، في حين أن الطن الواحد المنتج يوميا من الدهان الداخلي يستلزم مزج طنّين من المادة M_1 مع طن واحد من المادة M_2 ، ومن خلال الدّراسات على السّوق تبين أن الطلب على الدهان الداخلي لا يمكن أن يزيد عن الطلب على الدهان الخارجي بأكثر من طن واحد يوميا ، كما أظهرت الدراسات أنّ إجمالي الطّلب اليومي للدّهان الدّاخلي لا يتعدى طنّين يوميًا وترغب إدارة المصنع إيجاد السّياسة الانتاجيّة المثلى لتشغيل المصنع علمًا بأنّه تقرّر بيع الطن الواحد من الدّهان الخارجي بـ 6000 دج و الطن الواحد من الدّهان الداخلي بـ 4000 دج .

المطلوب : باعتبارك مديرا للانتاج في المصنع صغ نموذج البرمجة الخطية الذي يسمح بتحقيق تلك السياسة

تمرين 02:

يقوم مصنع "SAYONA" " للمكيّفات بصناعة ثلاثة أنواع من المكيّفات في خطّ الانتاج لهذا الشّهر (مكيفات موجهة للشركات ، مكيفات موجهة للمدارس الابتدائية ،مكيفات موجهة للمساجد) و قد بلغ سعر البيع لهذه المنتجات 1500 دج، 4300 دج، 12500 دج على التّوالي ، وتكلّف هذه المنتجات مواد أولية 600 دج، 2300 دج و 5600 دج على التوالي كما تكلّف عمالة قدرها 400 دج ، 900 دج، 1700 دج علماً الطلب على مكيّفات المساجد لايزيد عن 20 وحدة شهريا ، والطّلب على مكيّفات الشّركات 80 وحدة على الاقل ، و الطّلب على مكيفات المدارس الابتدائية 120 وحدة شهريا على الاكثر .

فإذا كان قيد العمالة لهذا الشّهر 550000 دج ، وقيد المواد الأولية 1500000 دج

المطلوب :صغ المسألة السابقة في الصّورة العامة لمسائل البرمجة الخطيّة لإيجاد الانتاج المنوّع الذي يعظّم الرّبح لهذه الشّركة ؟

التمرين 03:

تقوم شركة "QATA" بانتاج ثلاثة أنواع من الغسّالات في خط الانتاج لشهر جانفي 2021 (غسالات عاديّة ،غسالات اتوماتيكية ، غسالات مزدوجة الغسل والتجفيف)، و قد بلغ سعر بيع المنتجات 500 دج، 750 دج، 980 دج على التوالي ، وتكلّف هذه المنتجات الثلاثة موادًا أولية قدّرت بـ 200 دج، 300 دج، 400 دج على التوالي و حجم عمالة قدّر هو الآخر بـ 100 دج، 200 دج ، 250 دج على الترتيب و كان الطلب على الغسالات المزدوجة لايزيد عن 30 وحدة شهريا أما الطلب على الغسالات العادية فقد قدر بـ 90 وحدة شهريا على الأقل و الطلب على

الغسالات الأوتوماتيكية بـ 150 وحدة شهريا على الأكثر، فإذا علمت أنّ الطاقة التّشغيلية المتاحة للعمالة قدّرت بـ 850000 دج والمواد الأولية بـ 1000000 دج.

المطلوب :

صياغة نموذج البرمجة الخطية المناسب الذي يسمح بتعظيم الأرباح .

الفصل الثاني

الحل البياني للنموذج البرمجة

الفصـل الثاني: الحل البياني للنموذج البرمجة الخطية

تمهيد :

بعد صياغة النموذج الرياضي الخطي يمكن حله طريقتان اساسيتان هما :

- ✓ **الطريقة البيانية**
- ✓ **الطريقة البسيطة simplex**

تستعمل الطريقة البيانية في ايجاد الحل الامثل لنماذج البرمجة الخطية التي تتضمن متغيرين فقط و تعتبر هذه الطريقة من اسهل الطرائق ولكنها تعتبر غير كفوءة في معالجة مشكلات البرمجة الخطية في الحياة العملية مع أنها تؤدي الى فهم خصائص مشكلات البرمجة الخطية بيانيا و تساعد على فهم طريقة السمبلكس . بالنظر لكون الرسم البياني لقيود نموذج البرمجة الخطية يكون اكثر تعقيدا عندما يتضمن النموذج على ثلاث متغيرات وخصوصا عند تحديد منطقة الحلول الممكنة, لذا يفضل استعمال هذه الطريقة لنماذج البرمجة الخطية التي تتضمن متغيرن فقط.

<u>أولا:الطريقة البيانية –خطوات الحل باستخدام الطريقة البيانية–</u>

تستخدم طريقة الرسم البياني لإيجاد الحل الأمثل لنماذج البرمجة الخطية، و تعتبر من أسهل الطرق و التي تُستعمل فقط في حالة وجود متغيرين و الاستغناء عن ثلاثة متغيرات لأن تمثيلها يتم في الفضاء و يصعب تحليله [1].

[1] – يوسف صوار ، طاوس قندوسي، (دون سنة نشر) : **محاضرات في البرمجة الخطية – تمارين محلولة باستعمال برنامج Q.S.B–** كلية العلوم الاقتصادية التجارية و علوم التسيير، جامعة الدكتور الطاهر مولاي، سعيدة، ديوان المطبوعات الجامعية، وهران، الجزائر، ص 37.

4 نحول القيود من متباينات الى معادلات .

2- نعوض بأحد المتغيرات في المعادلة الواحدة بقيمة صفر لاستخراج قيمة المتغير الثاني، ثم نكرر ذلك بالنسبة للمتغير الاخر، وبذلك تصبح لدينا نقطتين لكل معادلة(مستقيم) وبوساطة هاتين النقطتين يمكن رسم المستقيم الذي تمثله المعادلة.

4 بعد رسم جميع المستقيمات التي تمثل القيود يتم تحديد منطقة الحل الممكن والتي هي منطقة محدبة و تسمى بمنطقة الحلول .

4 الحل الأساسي الابتدائي يمثل نقطة من منطقة القبول و ليس هو المنطقة

5- تحدد منطقة الحل الامثل حيث تمثل إحدى النقاط على الأقل الواقعة على تقاطعات المستقيمات الحل الأساسي الابتدائي المقبول و كما تسمى بنقاط التطرف التي تجعل الإرباح أعظم ما يمكن إذا كانت دالة الهدف تعظيم آو اقل ما يمكن إذا كانت دالة الهدف متدنية .

6- نرسم على المستوى الاحداثي (الافقي والعمودي)ليمثل احدهما المتغير X_1 وكميته ويمثل الآخر X_2 وكميته.

<u>ثانيا :الحل البياني حالة التعظيم: Max(z)</u>

بعد رسم جميع المستقيمات على المستوى نحدد نقاط التطرف (وهي النقاط التي تحيط بمنطقة الحلول الممكنة)ونختبر كل منها بالتعويض عنها في دالة الهدف والنقطة التي تجعل دالة الهدف اكبر ما يمكن ،تكون هي التي تمثل الحل الامثل اذا كانت دالة الهدف من نوع التعظيم Max والعكس بالعكس أي أن النقطة التي تجعل دالة الهدف اقل ما يمكن في حالة كون دالة الهدف من النوع المتدني Min هي التي تمثل الحل الأمثل .

مثال :

اوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية

$Max(Z)=4X_1+3X_2$ **دالة الهدف**

$5X_1+3X_2 \leq 30$ **القيد الأول**

$2X_1+3X_2 \leq 21$ **القيد الثاني**

$X_1, X_2 \geq 0$ **شرط عدم السلبية**

الخطوة الأولى : تحويل المتراجحات إلى معادلات

القيد الأول نجعله عبارة عن معادلة أي نستبدل علامة الأقل او تساوي بالمساواة وهذا لرسم حد المتباينة .

$5X1+3X2=30$

نفرض أنّ $X_1=0$

إذا $X_2=10$

$P_1\ (0,10)$

ثم نفرض $X_2=0$

إذا $X_1=6$

$P_2\ (6.0)$

بالنسبة للقيد الثاني :

$2X1+3X2=21$

نفرض $X_1=0$

إذا $X_2=7$

P_3 (0,7)

نفرض$X_2=0$

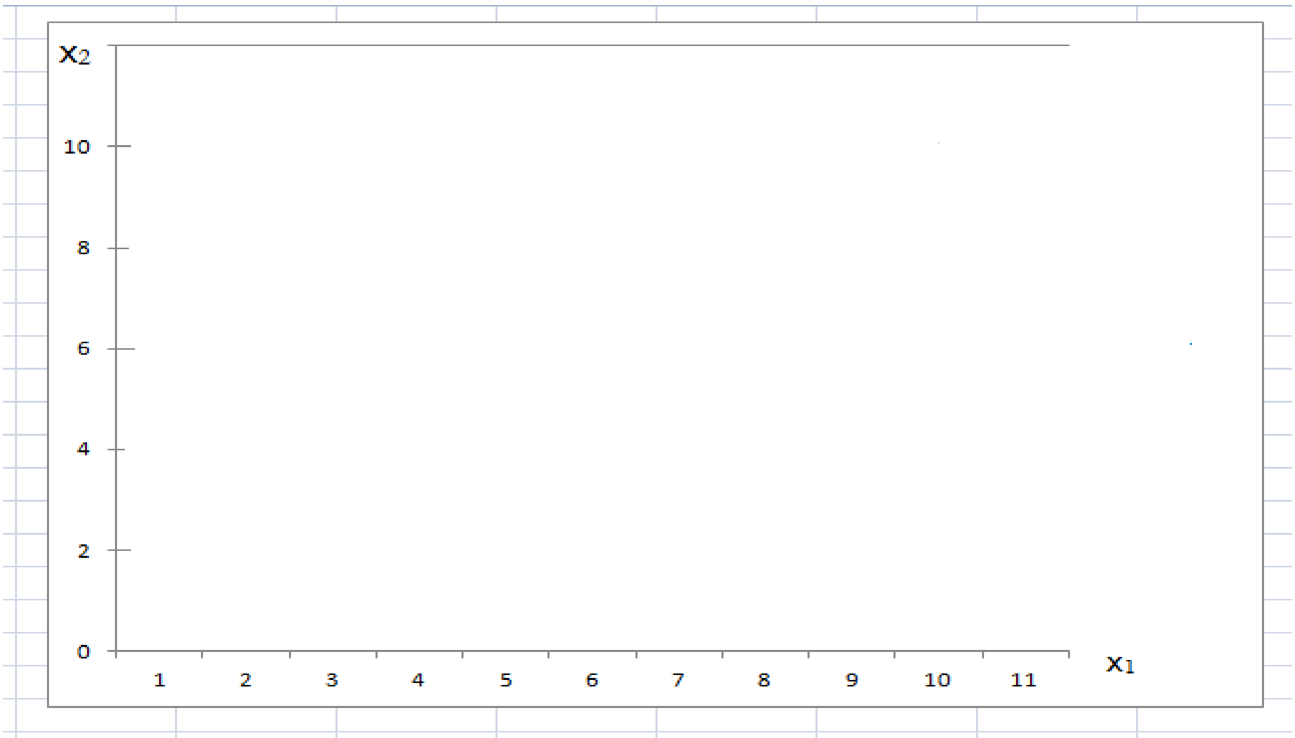
إذا $X_1=10.5$

P_4 (10.5,0)

الرسم البياني :

المحور الأفقي نضع المتغير x_1

المحر, العمودي نضع المتغير x_2

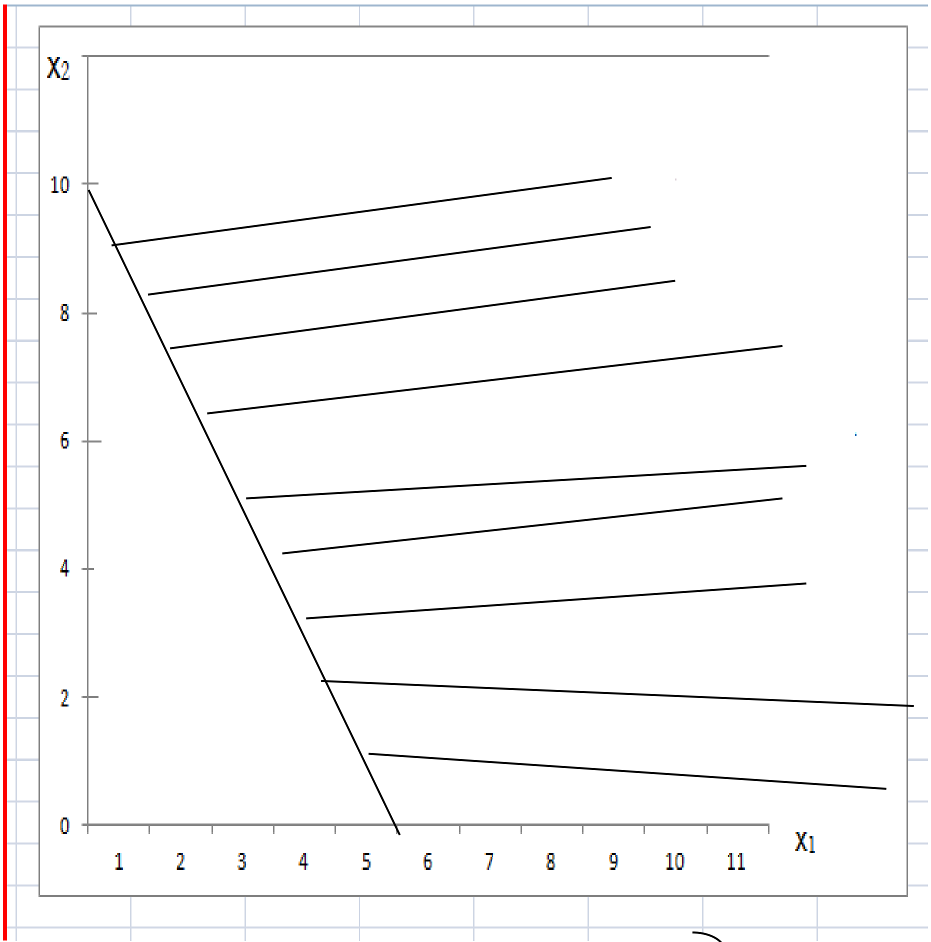


نصل بين النقطتين P_1 (0,10)

(P_1.P_2) P_2 (6.0)

لنشكل خط القيد الأول

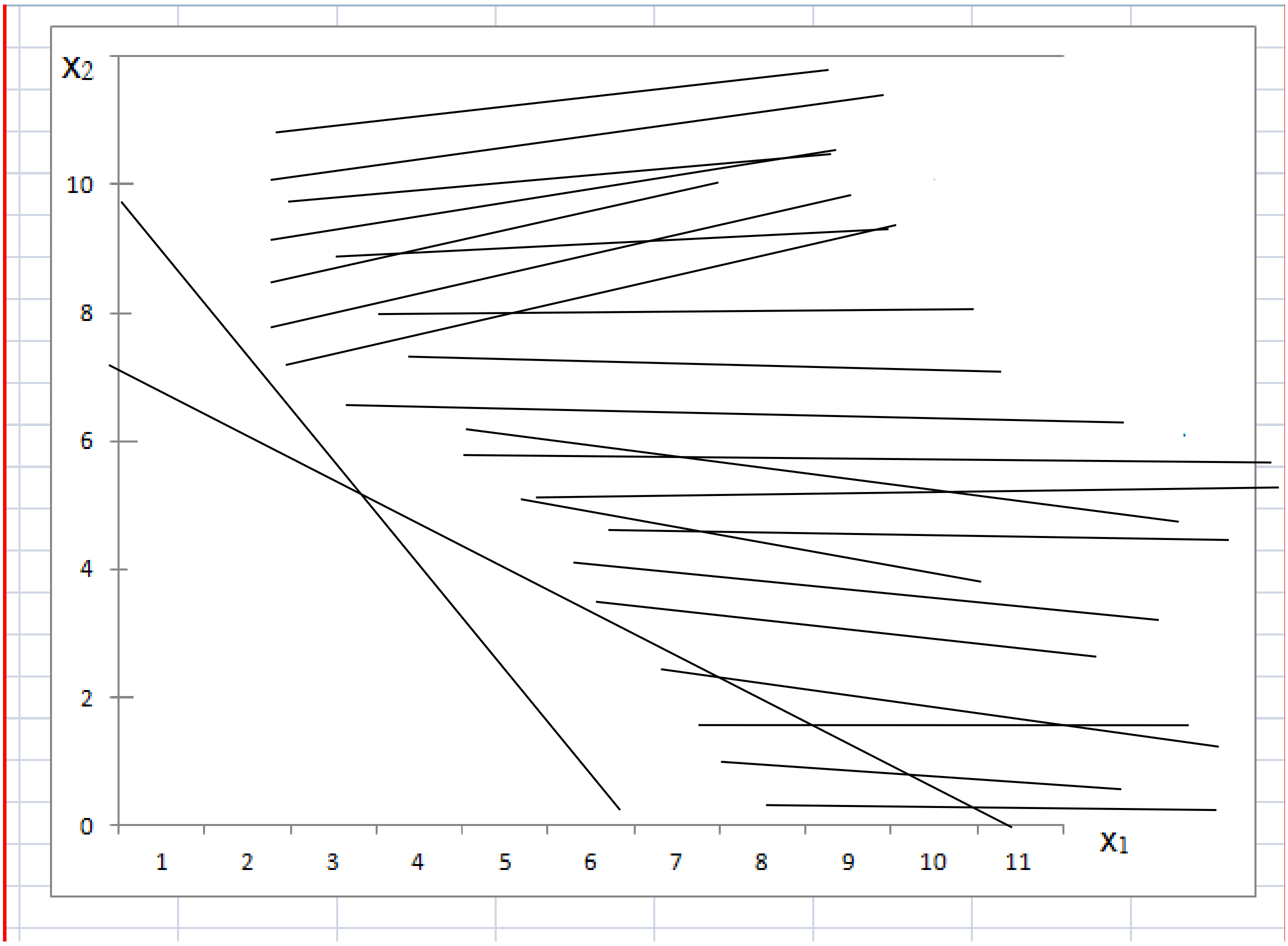
بما أن إشارة القيد هي أصغر أو يساوي ≤ نقوم بتشطيب المساحة التي فوق الخط ليصبح :



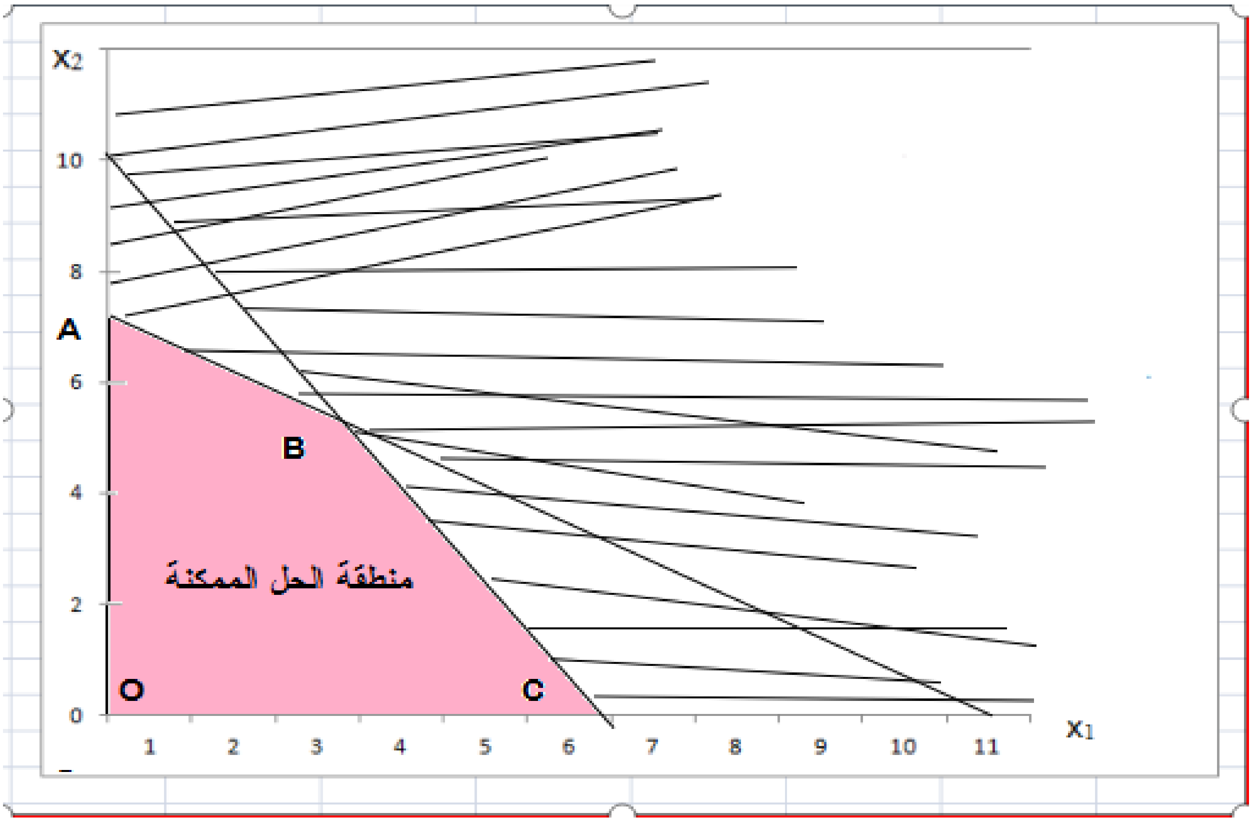
$(P_3.P_4)$ $P_3\ (0,7)$ نصل بين النقطتين

$P_4\ (10.5.0)$

لنشكل خط القيد االثاني



بما أن إشارة القيد الثاني هي أصغر أو يساوي نقوم بتشطيب المساحة ا لتي فوق الخط ليصبح الشكل كما يلي :



بعد هذا تحدد منطقة الحلول الممكنة وحسب ما هو مطلوب من القيود وهي المنطقة التي تحقق جميع القيود في وقت واحد وهي كما مبين في الشكل اعلاه (A,B,C,O) وبما ان احداثي جميع النقاط معلومة وهي (A,B,C,O) ما عدا النقطة (B) فيتم تحديد احداثيتها على النحو الاتي :

الوسيلة الاولى :

يقتضي هذا الاسلوب انزال اعمدة من النقطة المراد معرفة احداثيتها مثل (B) على المحوريين العمودي والافقي ويتقاطع هذين العمودين مع المحاور يتعين احداثي النقطة (B) على المحور العمودي وعلى المحور الافقي

الوسيلة الثانية :

الاسلوب يتضمن احدى الطرق الرياضية بما ان النقطة (B) تولدت من تقاطع المستقيمين الاول والثاني وهي الحذف او التعويض وعلى النحو التالي :

(1)................. $5X_1+3X_2=30$ (ضرب 2)

(2).......... $2X_1+3X_2=21$ (ضرب(−5))

بالجمع نجد : $-9X_2 = -45$

$X_2 = \frac{45}{9} = 5$

$X_2 = 5$

نعوض في إحدى المعادلات نجد :

$5X_1+3(5) = 30$

$5X_1 = 30-15$

$5X_1 = 15$

$X_1 = 3$

اما تحديد نقطة الحل الامثل فبعد ان يتم تحديد المنطقة المحدبة التي هي المحددة بالنقاط (A,B,C,O)التي تمثل منطقة الحلول الممكنة وبعد ان يتم معرفة احداثيات جميع نقاط التطرف يتم التعويض بإحداثيات النقاط في دالة الهدف وكما يلي :

نقاط التطرف احداثيات نقاط التطرف (X_1,X_2) قيمة دالة الهدف عند الاحداثيات(X_1,X_2)

النقاط	الإحداثيات		$Max(Z)=4X_1+3X_2$
	X_1	X_2	
O	0	0	$Max(Z)=0$
A	0	7	$Max(Z)=21$
B	3	5	$Max(Z)=27$
C	6	0	$Max(Z)=24$

MAX (Z) =21 A (0,7)

MAX (Z) =27 B (3,5)

MAX (Z) =24 C (6,0)

MAX (Z) =0 O (0,0)

بما ان النقطة B حققت اعلى عائد في دالة الهدف 27= MAX (Z) وبما ان دالة الهدف من نوع Max فإن النقطة B تحقق الحل الامثل

ملاحظة :

تكون نقطة واحدة على الأقل من نقاط التطرف تمثل الحل الأمثل أي معنى هذا ممكن إن تكون هناك نقطتان تمثل الحل الأمثل

ثالثا: الحل البياني – حالة التدنية (التقليل)–

مثال (2):

ترغب احدى شركات تصنيع الاعلاف وضع برنامج خاص بانتاج العلف الحيواني اذ قررت انتاج نوعين من انواع العلف كل منهما يتكون من مزيج من المواد الغذائية التي تطحن في مطاحن خاصة لتصبح جاهزة للاستعمال , كلفة النوع الاول من العلف 41 دينار للوحدة , وكلفة النوع الثاني 35 دينار .

للوحدة يدخل في تركيب كل من نوعي العلف اربعة مواد غذائية , يتطلب تصنيع العلف من النوع الاول مزج (2 , 1 , 5 , 0.6) وحدة من المواد الغذائية)D , C , B , A) على التتابع. الاحتياجات الاسبوعية من المواد الغذائية (A , B , C , D) والمفروض كل نوع من العلفين توفرها للحيوان هي (1250 , 250 , 900 , 232.5) كلغ على التتابع.

المطلوب:

1-صياغة النموذج الرياضي لهذه المشكلة.

2- ايجاد البرنامج الامثل لانتاج النوعين من العلف الحيواني باستخدام طريقة الرسم البياني.

الحل:

نلخص بيانات المشكلة في الجدول الاتي:

المواد الغذائية الداخلة في تركيب العلف	نوع العلف		الاحتياجات الاسبوعية من المواد الغذائية(كغم)
	الاول	الثاني	
A	2	3	1250
B	1	1	250
C	5	3	900
D	0.6	0.25	232.5
كلفة الوحدة الواحدة من العلف (دينار)	41	35	

القرار يتعلق في تحديد الكمية المنتجة من كل نوع من نوعي العلف بما يحقق اقل كلفة ممكنة.

نفرض أن X_1 يساوي عدد الوحدات المنتجة من العلف الأول.

نفرض أن X_2 يساوي عدد الوحدات المنتجة من العلف الثاني .

صيغة النموذج الرياضي :

$$\text{Min. } Z = 41\,X_1 + 35\,X_2$$

S.T.

$$\begin{cases} 2\,X_1 + 3\,X_2 \geq 1250 \\ X_1 + X_2 \geq 250 \\ 5\,X_1 + 3\,X_2 \geq 900 \\ 0.6\,X_1 + 0.25\,X_2 \geq 232.5 \\ X_1\,,\ X_2 \geq 0 \end{cases}$$

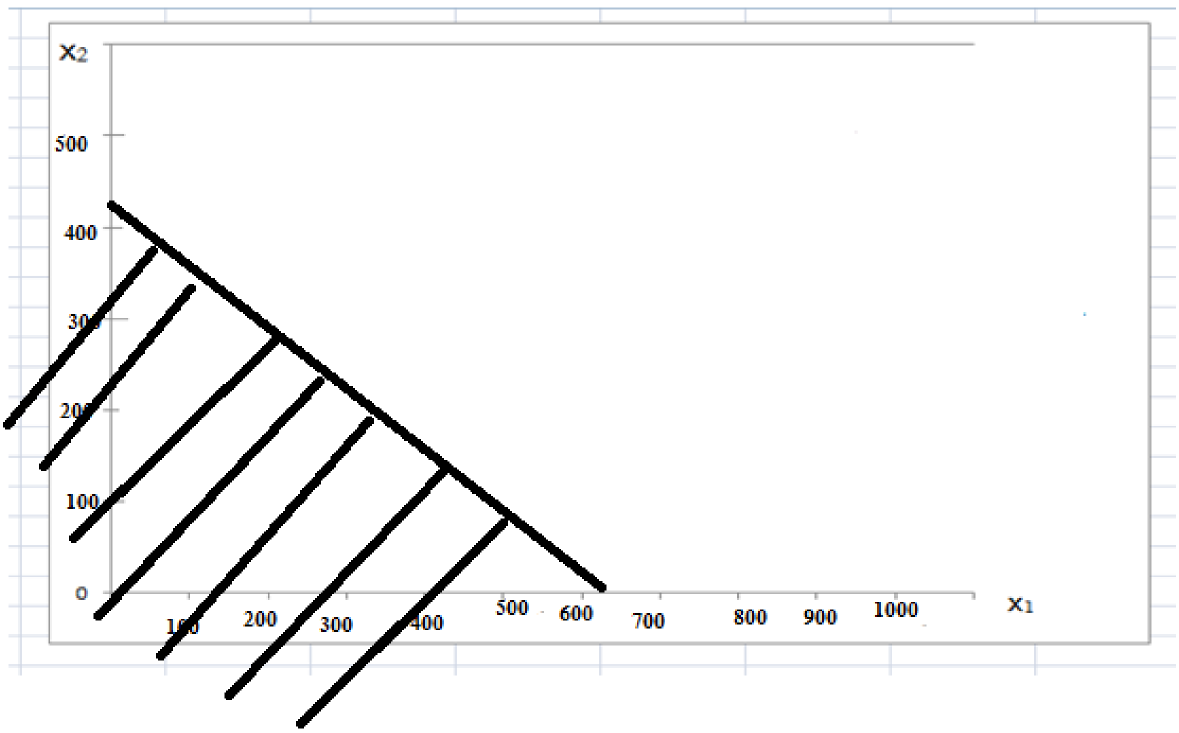
ايجاد الحل الامثل بطريقة الرسم البياني:

رسم القيد الاول:

$$2\,X_1 + 3\,X_2 = 1250$$

النقطة	X_1	X_2
A	0	416.67
B	625	0

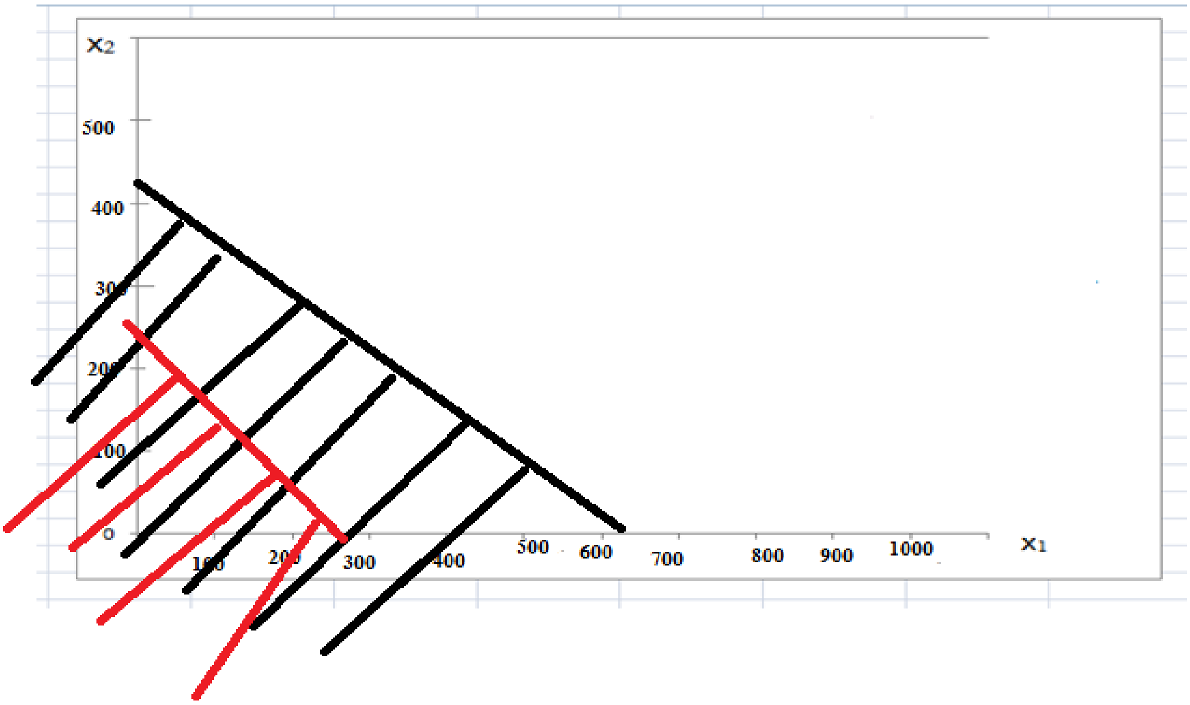
شكل (1): الرسم البياني للقيد الاول



رسم القيد الثاني: $X_1 + X_2 = 250$

النقطة	X_1	X_2
C	0	250
D	250	0

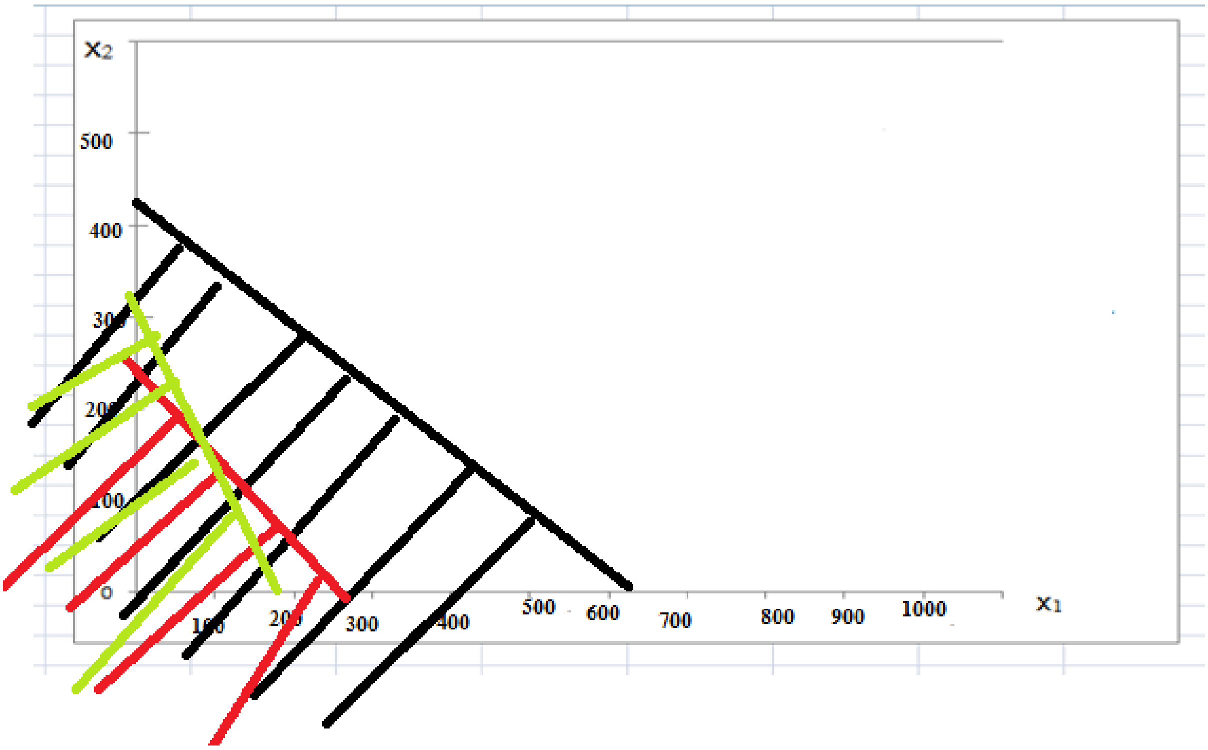
شكل (2): الرسم البياني للقيد الثاني



رسم القيد الثالث: $5X_1 + 3X_2 = 900$

النقطة	X_1	X_2
E	0	300
F	180	0

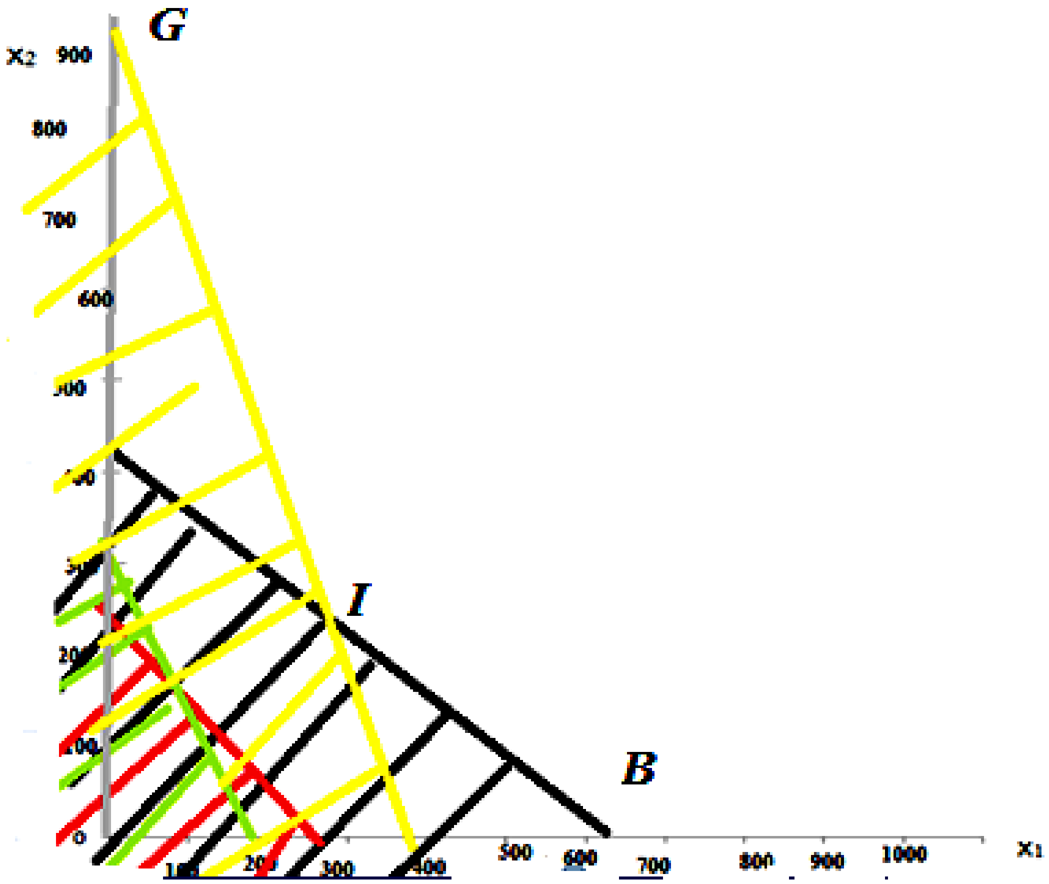
شكل (3) : الرسم البياني للقيد الثالث



رسم القيد الرابع: $0.6\ X_1 + 0.25\ X_2 = 232.5$

النقطة	X_1	X_2
G	0	930
H	387.5	0

شكل (4) : الرسم البياني للقيد الرابع



من الرسوم البيانية للقيود الأربعة نلاحظ آن النقاط الواقعة على الخط المستقيم وأعلى الخط المستقيم هي التي تحقق تلك القيود وذلك لان القيود بهيئة اكبر او تساوي.

الرسم البياني التالي يبين رسم القيود الاربعة وتحديد منطقة الحلول الممكنة.

منطقة الحلول الممكنة المقبولة (المنطقة المظللة بالمربعات الصغيرة) هي تلك المنطقة المشتركة بين القيود الاربعة (اي التي تحقق تلك القيد في آن واحد) وهي المنطقة المحددة بالنقاط (G , I , B) وتلك النقاط هي التي تسمى بالنقاط المتطرفة , النقطتين

(G , B) احداثياتها محددة اما النقطة (I) والتي تمثل نقطة تقاطع القيدين الاول والرابع احداثياتها غير محسوبة ويجب حسابها عن طريق حل معادلتي القيدين المذكورين انيا واستخراج قيمة كل من X_1 و X_2 اللتان تحققان القيدين في ان واحد.

ملاحظة : يترك استخراج احداثيات النقطة I كتمرين للطالب , علما ان إحداثيات هذه النقطة هي (296.15 , 219.23) ويتم إيجادها بحل المعادلتين الاتيتن أنيا:

$$2 X_1 + 3 X_2 = 1250$$

$$0.6 X_1 + 0.25 X_2 = 232.5$$

لايجاد الحل الامثل نعوض النقاط المتطرفة في دالة الهدف والنقطة التي احداثياتها تحقق اقل قيمة لدالة الهدف تمثل الحل الامثل :

النقاط المتطرفة	قيمة دالة الهدف $Z = 41 X_1 + 35 X_2$
G (0 , 930)	**Z = 35 * 930 = 32550**
I (296.15 , 219.23)	**Z = 41 * 296.15 + 35 * 219.23 = 19815.2**
B (625 , 0)	**Z = 41 * 625 = 25625**

نلاحظ ان اقل قيمة لدالة الهدف هي 19815 ,2 والتي تمثل اقل كلفة للإنتاج وتحققها إحداثيات النقطة (296.15 , 219.23) I , ذلك يعني ان الحل الامثل هو $X_1 = 296.15$ و $X_2 =$

219.23 بما يحقق اقل قيمة لدالة الهدف Min. Z = 19815.2 , أي ان البرنامج الانتاجي الامثل لانتاج العلف الحيواني هو :

انتاج 296.15 كغم من العلف الاول و 219.23 كغم من العلف الثاني بما يحقق اقل كلفة ممكنة وتساوي 19815.2 دينار .

بملاحظة الشكل (4) نجد ان القيدين الثاني والثالث لا يؤثران على الحل الامثل للمشكلة اذ انهما لا يشتركان مع القيدين الاول و الرابع في تحديد منطقة الحلول الممكنة بالرغم من ان نقاط تلك المنطقة تحققهما لذا يسمى هذين القيدين بالقيدين المكررة (محتواة في القيود الأخرى) و نستطيع إلغاءها .

رابعا: الحالات الخاصة خاصة في الطريقة البيانية

هناك حالات خاصة يمكن ان نلاحظها عند حل نموذج البرمجة الخطية والتي تعد حالات خاصة لحلول تلك النماذج وهي :

4 تعدد الحلول المثلى:

من المفروض ان نحصل على حل أمثل واحد عند حل نموذج البرمجة الخطية, ولكن هناك حالة خاصة وهي حصولنا على أكثر من حل أمثل (أي تعدد الحلول المثلى) , تحصل هذه الحالة عندما توازي احد القيود الهيكلية المحددة لمنطقة الحلول الممكنة دالة الهدف الخطية, ويمكن ملاحظة هذه الحالة مباشرة من النموذج عندما نجد ان معاملات احد القيود الهيكلية من مضاعفات معاملات دالة الهدف المناظرة لها عندها نتوقع حلول متعددة مثلى لهذا النموذج, وكما موضح في المثال الاتي:

مثال (1):

$$Max\ (Z) = X_1 + 2X_2$$

Subject to :

$$X_1 + 2X_2 \leq 24$$

$$1{,}5X_1 + X_2 \leq 18$$

$$X_1 \leq 10$$

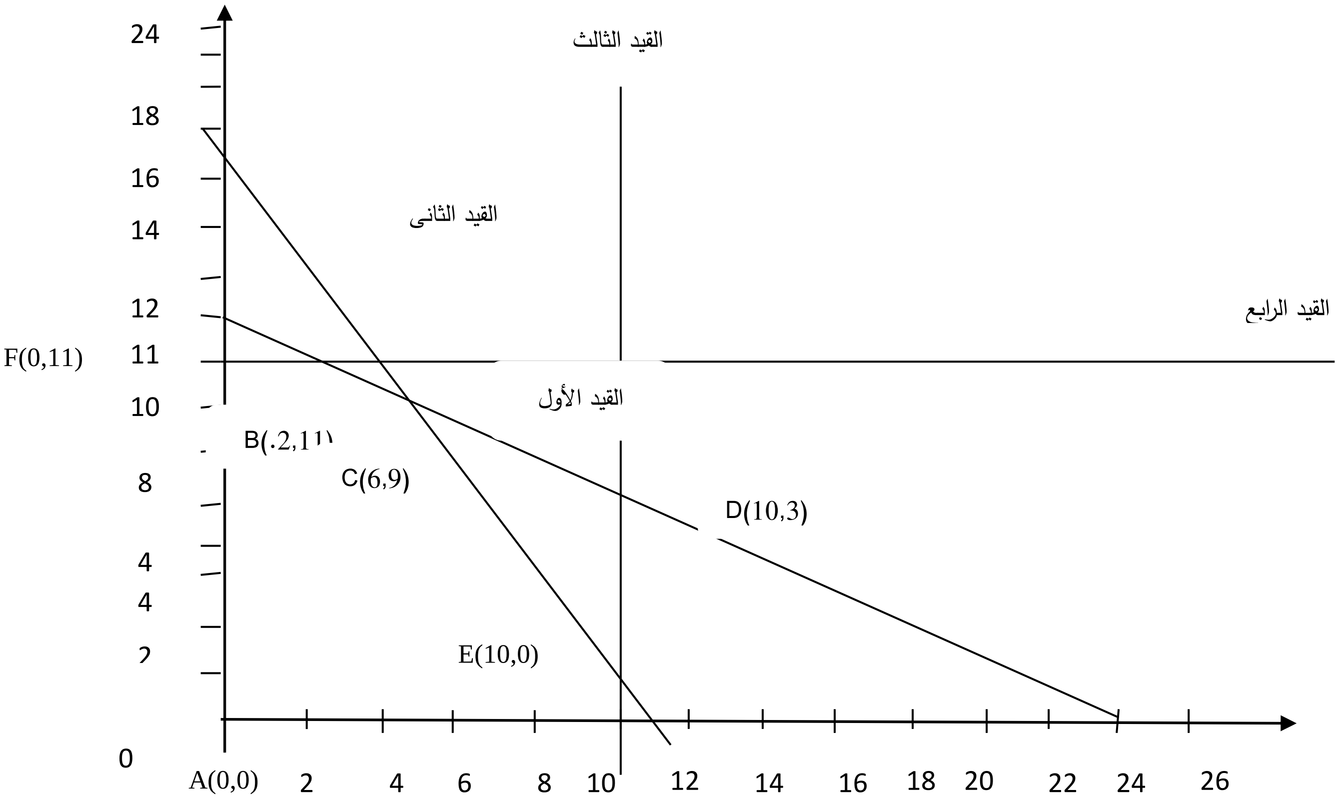
$$X_2 \leq 11$$

$$X_1, \quad X_2 \geq 0$$

تحديد نقاط الرسم

X_1	X_2	**نقاط الرسم**
0 **24**	**12** **0**	**(24،12)**
0 **12**	**18** **0**	**(12،18)**
10	**مهما تكن قيم** 2	
مهما تكن قيم X_1	**11**	

سلم الإحداثيات:



بتعويض نقاط الرسم في دالة الهدف.

النقاط	الإحداثيات		دالة الهدف $Max\ (Z) = X_1 + 2X_2$
	X_1	X_2	
O	0	0	$Max\ (Z) = 0$
A	0	11	$Max\ (Z) = 22$
B	2	11	$Max\ (Z) = 24$
C	6	9	$Max\ (Z) = 24$
D	10	3	$Max\ (Z) = 16$
E	10	0	$Max\ (Z) = 10$

تعويض النقاط المثلى في القيود لتحديد الطاقات الفائضة

القيود	النقطة المثلى C(6,9)	الطاقة الفائضة
$X_1 + 2X_2 \leq \ 24$	$= 6 + 2(9) \leq 24$ $24 \leq 24$	0
$1{,}5X_1 + 2X_2 \leq 18$	$= 1.5(6) + 1(9) \leq 18$ $9 + 9 \leq 18$ $18 \leq 18$	0
$X_1 \leq \ 10$	$= 6 \leq 10$ $= 10 - 6 = 4$	4
$X_2 \leq \ 11$	$9 \leq 11$ $11 - 9 = 2$	9

القيود	النقطة المثلى B(2,11)	الطاقة الفائضة
$X_1 + 2X_2 \leq \ 24$	$= 2 + 2(11) \leq 24$ $24 \leq 24$	0
$1{,}5X_1 + 2X_2 \leq 18$	$= 1.5(2) + 11 \leq 18$ $3 + 11 \leq 18$ $14 \leq 18$ $18 - 14 = 4$	4
$X_1 \leq \ 10$	$= 2 \leq 10$ $= 10 - 2 = 8$	8
$X_2 \leq \ 11$	$11 \leq 11$	0

2- الحلول غير المحدودة :

قد نحصل عند حل مشكلات البرمجة الخطية على حلول ممكنة غير محدودة وهي حالة خاصة نادرة الحدوث في الحياة العملية, ونلاحظ هذه الحالة الخاصة في الرسم البياني عندما نحصل على منطقة حلول ممكنة غير محدودة وكما موضح بالمثال الاتي:

$$Max\ (Z) = 2X_1 + X_2$$

Subject to :

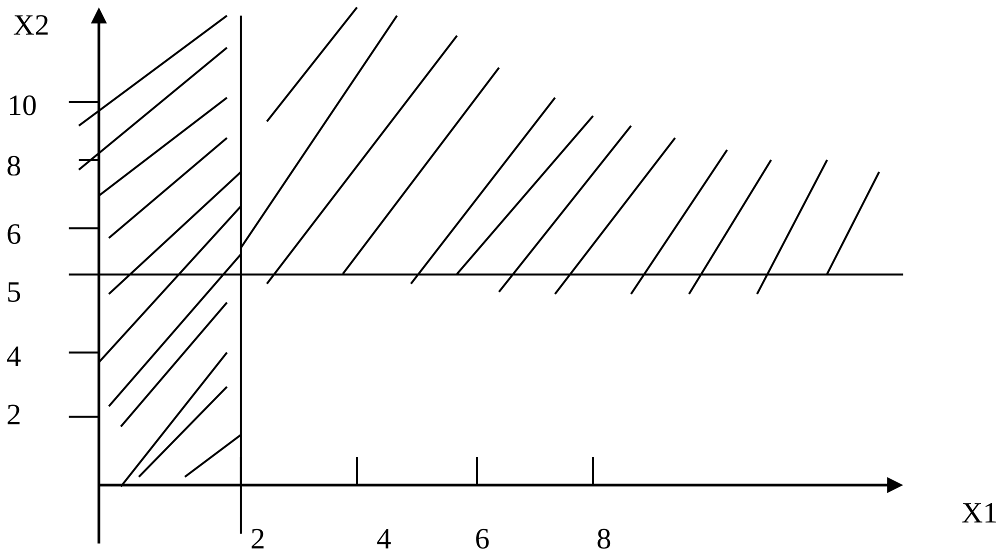
$$X_1 \geq 2$$

$$X_2 \leq 5$$

$$X_1, \quad X_2 \geq 0$$

رسم الإحداثيات

حالة عدم وجود حدود(منطقة الحل غير محددة)



3-عدم وجود حلول مقبولة:

اذا كانت منطقة الحلول الممكنة الناتجة من تقاطع قيود نموذج البرمجة الخطية عبارة عن مجموعة خالية فاننا لن نحصل على حلول ممكنة لمشكلة البرمجة الخطية, بمعنى آخر ليس هناك حلول ممكنة لنموذج البرمجة الخطية في حالة عدم وجود منطقة مشتركة بين قيود النموذج وبالتالي ليس هناك حل امثل للمشكلة, كما موضح بالمثال الآتي:

مثال

تقوم الشركة العامة للصناعات الكيماوية، بإنتاج نوعين من المنتجات هما (A و B) خدم فيها ثلاثة أنواع من المواد الأولية، ويوضح الجدول أدناه الكميات المنعدمة من المواد الأولية الثلاث في إنتاج كل طن من كل منتج مع بيان الكميات : منها في المخازن بالأطنان.

المنتج / المواد الأولية	A طن	B طن	الكميات المتاحة في المخازن طن
الأولى	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	20
الثانية	–	$\frac{1}{5}$	5
الثالثة	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	21

درست المشكلة في قسم المحاسبة، وتم التوصل إلى أن ربح الشركة من بيع كل طن من المنتج (A) يبلغ (40) دينار وربح بيع كل طن من المنتج (B) (30) دينارا. أن كميات الإنتاج المطلوبة هي (30) طنا على الأقل من (A) و (15) طنا على الأقل من (B).

المطلوب:

تحديد كميات الإنتاج من كل منتج، بحيث تحقق الشركة أقصى عائد ممكن باستخدام الطريقة البيانية والجبرية في الحل.

تحديد منطقة الحلول المتاحة وتأشير النقاط على الرسم. تحليل النتائج مع بيان كيفية المساعدة في اتخاذ القرار الإداري المناسب.

بفرض أن عدد الأطنان التي سيتم إنتاجها من (A) هو X_1.

وعدد الأطنان التي سيتم إنتاجها من (B) هو X_2.

$$Max\ (Z) = 40X_1 + 30X_2$$

$$\frac{2}{5}X_1 + \frac{1}{2}X_2 \leq \ 20 \ldots\ldots\ldots.(1)$$

$$\frac{1}{5}X_2 \leq \ 5 \ldots\ldots\ldots.(2)$$

$$\frac{3}{5}X_1 + \frac{3}{10}X_2 \leq \ \ 21 \dots\dots\dots.(3)$$

$$X_1 \geq \ \ 30 \dots\dots\dots.(4)$$

$$X_2 \geq \ \ 15 \dots\dots\dots.(5)$$

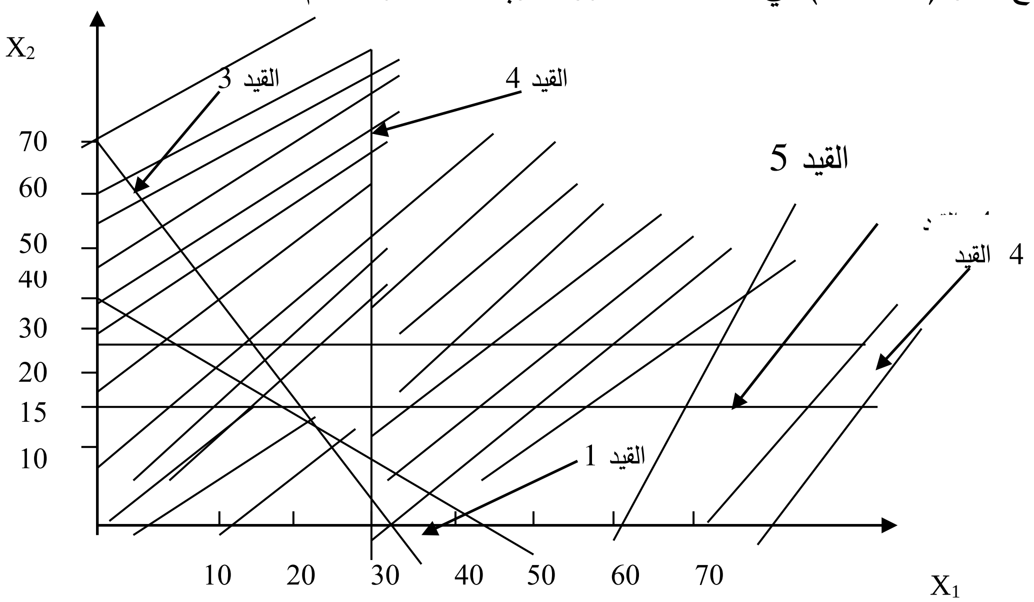
$$X_1, \quad X_2 \geq \ \ 0$$

2.تحديد نقاط الرسم

X_1	X_2	**نقاط الرسم**
0 **50**	**40** **0**	**(40،50)**
مهما تكن قيم X_2	**25**	
0 **35**	**70** **0**	**(35،70)**
30	**مهما تكن قيم** 1	
مهما تكن قيم X_2	**15**	

تظهر هذه الحالة حينما لايتم التوصل إلى حل لمشكلة البرمجة الخطية والتي ينبغي فيها تحقيق شروطها جميع القيود(المحددات) في المشكلة المطروحة وبضمنها شرط عدم السلبية

:



هناك حالة خاصة هي حالة الحل المستحيل حيث يلاحظ أنه لا توجد منطقة مشتركة تحقق جميع قيود المسألة(القيود الخاصة بالمواد والقيود الخاصة بالإنتاج)، وعليه لا توجد منطقة حلول متاحة للنموذج البرمجة الخطية ولا بد من إعلام الإدارة بأن المتوفر من المواد الأولية لا يكفي لإنتاج (30) طن من المنتج A و(15) طن من المنتج (B) من أجل إتخاذ القرار المناسب لذلك.

4 الانحلال :

تحدث حالة الانحلال عندما يكون عدد متغيرات الأساس التي تكون قيمتها اكبر من الصفر في الحل الامثل أقل من عدد قيود نموذج البرمجة الخطية. كما موضح بالمثل الاتي:

مثال 1:

تقوم شركة "منازل " بإنتاج أبواب ونوافذ للمنازل وكان لدى الشركة ورشتين الأولى تستخدم في تقطيع وتجميع الابواب والنوافذ لمدة 16 ساعة في اليوم والثانية تقوم بعمليات الدهانات المتنوعة لكل من الابواب و النوافذ لمدة 8 ساعات يوميا وقد كان ربح الشركة من بيع الباب الواحد هو 6 م و ن ومن النافذة الواحدة هو 18 م و ن و كان الوقت اللازم للإنتاج وحدة واحدة من كل الأبواب و النوافذ في الورشتين هو كالتالي :

الورشات	الأبواب (بالساعات)	النوافذ (بالساعات)
الورشة 1	2	8
الورشة 2	2	4

ملاحظة : م و ن =مليون وحدة نقدية

- **اوجد الحل الامثل لنموذج البرمجة الخطية**

- هل هناك حالة خاصة وضح ذلك ؟

الحل :

نرمز لعدد الابواب بـ X_1

نرمز لعدد النوافذ بـ X_2

$$Max.\ Z = 6X_1 + 18X_2$$

$$\begin{cases} 2X_1 + 8X_2 \le 16 \\ 2X_1 + 4X_2 \le 8 \\ X_1 ,\ X_2 \ge 0 \end{cases}$$

نرسم قيدي النموذج :

النقطة	القيد الاول $2X_1 + 8X_2 = 16$	
	X_2	X_1
P1	2	0
P2	0	8

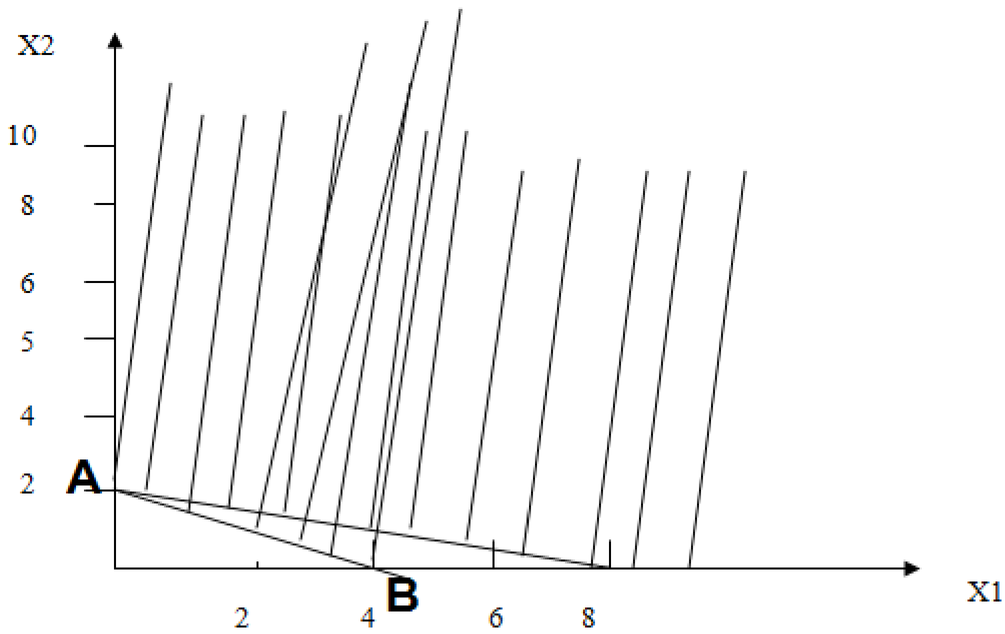
النقطة	القيد الثاني $2X_1 + 4X_2 = 8$	
	X_2	X_1
P3	2	0
P4	0	4

القيد الاول يمثل بالخط المستقيم المحدد بالنقطتين p1(0,2) و p2(8,0).

القيد الثاني يمثل بالخط المستقيم المحدد بالنقطتين p3(0,2) و p4(4,0)

نرسم القيدين ونحدد منطقة الحلول الممكنة وكما مبين بالشكل الاتي:

الرسم البياني لقيدي نموذج البرمجة الخطية ومنطقة الحلول الممكنة .



نلاحظ من خلال الشكل أعلاه أن القيد الأول يقع في منطقة الرفض بعد رم القيد الأول أي أن القيد الثاني ألغى القيد الأول حيث نموذج البرمجة الخطية تضمن قيدين و كان من المفروض أن يكون قيد واحد فقط وهو القيد الثاني وهذا ما يدل على وجود حالة خاصة هي حالة تفخ أو انحلال الحل .

الفصل الثالث

حل البرنامج الخطي العام باستخدام طريقة السمبلكس(طريقة الجداول)

الفصل الثالث: حل نموذج البرمجة الخطية باستخدام طريقة السمبلكس(Simplexe)

(طريقة الجداول)

تمهيد:

لقد لاحظنا سابقا أن الطريقة البيانية لا تستخدم إلا في حالة و جود متغيرين فقط, ويرجع ذلك إلى صعوبة بل إستحالة الرسم البياني عندما يزيد عدد المتغيرات الواجب إتخاذ قرار بشأنها عن إثنين , و طالما أن معظم التطبيقات العلمية تتضمن عدد كبير من المتغيرات و القيود , فإننا نحتاج إلى أسلوب آخر صمم خصيصا لذلك يعرف بأسلوب السمبلكس Simplex Méthod .

يقوم أسلوب السمبلكس الذي قدمه G.B.Dantzig الأمريكي في عام 1947 م[1], على مجموعة من الخطوات الجبرية التي تؤدي إلى الوصول إلى الحل الأمثل , في حالة وجود حل , وذلك في عدة مراحل متتابعة و محددة , و يتم تحقيق ذلك عن طريق تقييم النقط الركنية للمنطقة الممكنة في خطوات متتابعة تؤدي إلى الوصول إلى حلا أفضل في كل مرحلة , وذلك إلى الحد الذي لا يمكن معه تحقيق تحسين في الحل , عندئذ نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل .

<u>أولا خطوات حل نموذج البرمجة الخطية باستخدام طريقة السمبلكس</u>

يمكن تلخيص الخطوات التي تتضمنها طريقة السمبلكس في الخطوات الخمس التالية :

1- وضع مشكلة البرمجة الخطية في الصيغة المعيارية (النمطية) Forme Standard.

2- اختيار حل مبدئي ممكن و هو عبارة عن نقطة ركنية في المنطقة الممكنة .

[1] - حسن علي مشرقي ,(1997)، <u>نظرية القرارات الإدارية مدخل كمي في الإدارة</u> ,دار المسيرة للنشر و التوزيع الأردن الطبعة الأولى ، ص 165.

3- تقييم إمكانية تحسين الحل القائم .

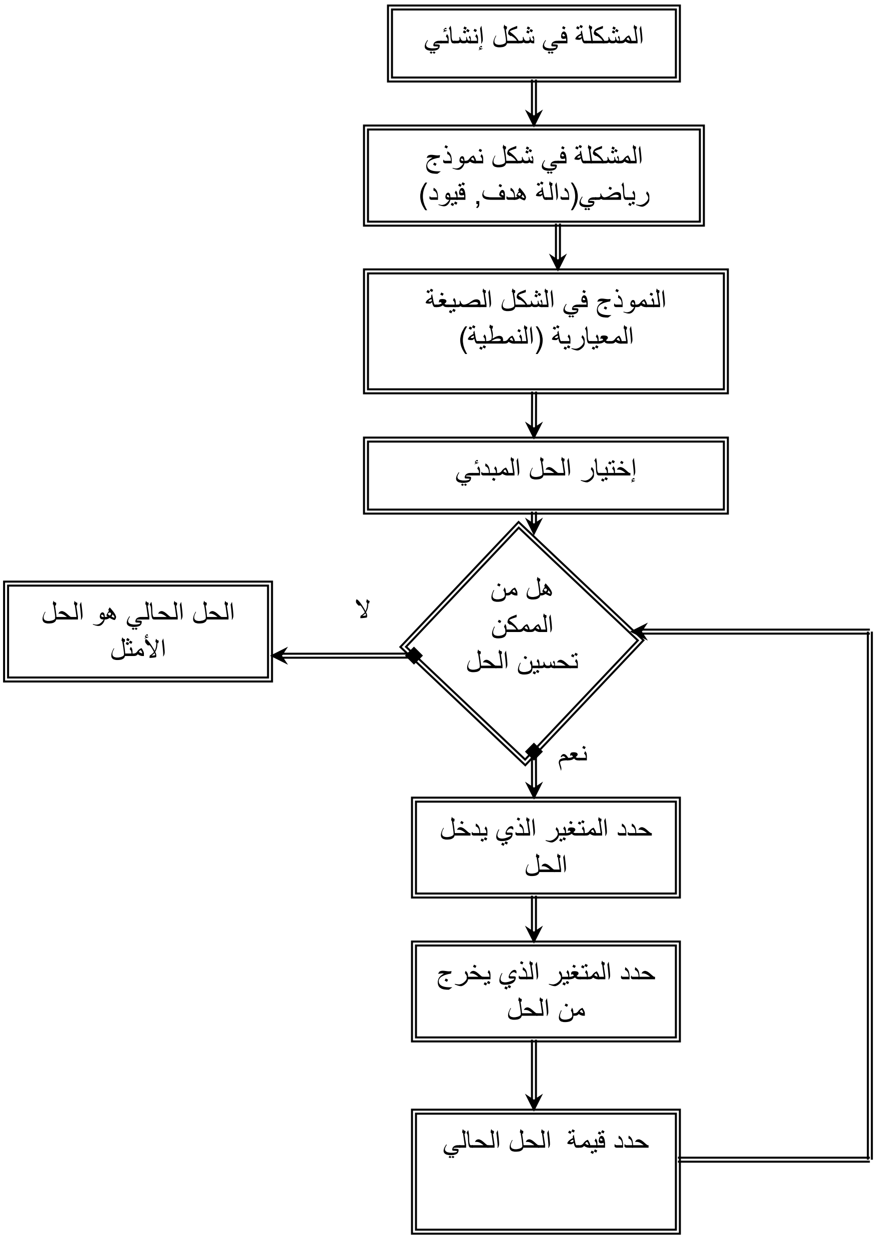
4- إذا كان التحسين ممكنا يتم العمل الخطوات التالية :

- ✓ حدد المتغير الغير أساسي الغير موجود في الحل الحالي و الواجب إدخاله في الحل , و إعتباره متغيرا أساسيا.
- ✓ حدد المتغير الأساسي الموجود في الحل الحالي و الواجب خروجه من الحل , و إعتباره متغيرا غير أساسي .
- ✓ حدد قيم المتغيرات الموجودة في الحل الجديد , وهو يعبر عن نقطة ركنية في المنطقة الممكنة , و ذلك حدد قيم المعاملات الجديدة في معادلات القيود .
- ✓ أرجع إلى الخطوة الرابعة وكرر عملية التقويم .

5- إذا كان التحسين غير ممكن فإن الحل الذي توصلت إليه يكون هو الحل الأمثل .

ويوضح الشكل التالي العلاقة بين هذه الخطوات المذكورة سالفا

<u>شكل رقم (01)</u> " يوضح خطوات الحل بطريقة السمبلكس".



- Yves Noobert .Roch Ouellet .Réges Parent , (1995) : **La recherche opérationnelle** ,gaitan morin éditeur ,p170

ثانيا: حالة التعظيم

حالة تعظيم الربح والقيود فقط من نوع أصغر من أو يساوي($\leq$)

تحويل نموذج البرمجة الخطية من الصيغة العامة أو القانونية (canonical form) إلى الصيغة القياسية (Standard form) و ذلك :

– بإضافة متغير راكد (مهمل أو إضافي) إلى دالة الهدف (Z) و من ثم تحويل دالة الهدف (Z) إلى معادلة صفرية عن طريق تحويل القيم إلى الجانب الأيسر وجعلها تساوي صفر.

– بإضافة متغير راكد إلى قيود المشكلة (لا بد أن تكون من نوع اصغر من او يساوي) إلى الطرف الأقل من المعادلة وهو الطرف الأيسر.

– تحديد عدم السلبية أي أن كافة قيم المتغيرات في المشكلة تكون موجبة أو مساوية للصفر أي أن

$(x_j , s_i \geq 0)$ حيث j عدد المتغيرات و i عدد القيود.

– تنظيم جدول الحل الأساسي الممكن (Feasible solution) أو الإبتدائي بالاعتماد على جميع معاملات المتغيرات xj , si في قيود النموذج و دالة الهدف كما يلي :

– تحديد المتغير الداخل (Entering variable) و على أساس أكبر قيمة بإشارة موجبة في صف دالة الهدف (Z) .

– العمود الذي يوجد فيه المتغير الداخل يسمى بالعمود المحوري أو عمود الارتكاز (Pivot column),

– تحديد المتغير الخارج (Leaving variable) عن طريق قسمة القيم الموجودة في الجهة اليمنى في عمود (Right hand side RHS)على ما يقابلها من قيم المعاملات في العمود المحوري أو عمود الارتكاز (Pivot col) ، و المتغير الذي يقابل أقل قيمة موجبة (وتهمل القيم غير المعرفة والسالبة) من خوارج القسمة يعد هو المتغير الخارج ، ليحل المتغير الداخل محله في الجدول لاحقا.

– الصف الذي يوجد فيه المتغير الخارج يسمى بالصف المحوري أو صف الارتكاز (Pivot row). أما العنصر الناتج من تقاطع عمود المتغير الداخل مع صف المتغير الخارج يدعى **بنقطة الارتكاز.**

– يمكن الحصول على المعادلة المحورية أو الممهدة (Pivot equation) من خلال قسمة القيم في صف المتغير الخارج على العنصر المحوري (Pivot element) وهي تمثل قيم المتغير الداخل الجديدة لغرض تحسين الحل الممكن أي بناء جدول آخر

– يتم وضع المعادلة المحورية أو الممهدة في الجدول الجديد للحل في الموقع نفسه حيث يخرج منه المتغير الخارج ليحل محله المتغير الداخل.

يتم إيجاد معاملات دالة الهدف الجديدة (New z) و كالآتي :

معاملات (z) الجديدة = معاملات (z) القديمة – (معامل المتغير الداخل في صف دالة الهدف x المعادلة المحورية)

بمعنى ضرب العنصر المقابل لدالة الهدف في عمود المحور(تحت العنصر الداخل) في المعادلة المحورية وطرح النتيجة مع قيم دالة الهدف في الجدول القديم لتوضع في الجدول الجديد.

يتم إيجاد معاملات القيود الجديدة للمتغيرات si كالآتي:

معاملات (si) الجديدة = معاملات (si) القديمة – معامل المتغير الداخل في صف (si) x (المعادلة المحورية)

بمعنى أخذ المعامل تحت المتغير الداخل للقيد بعكس إشارته وضربه بالمعادلة الممهدة ومن ثم جمعه مع القيم العائدة له في الجدول وتوضح في الجدول الجديد وهكذا مع بقية القيود الأخرى.

يتم الوصول للحل الأمثلOptimal solution عندما تكون جميع معاملات دالة الهدف الجديدة في جدول الحل أصغر أو تساوي صفر، أما إذا كانت قيمة واحدة على الأقل في دالة الهدف موجبة فهذا

يعني عدم التوصل إلى الحل الأمثل.

– يعاد إجراء الخطوات السابقة نفسها بدءا من تحديد العنصر الداخل و الخارج والمعادلة المحورية حتى تصبح جميع معاملات دالة الهدف أصغر أو تساوي صفر.

مثال: (مشكلة تعظيم)

$$Max(Z)=60X_1+36X_2$$

$$\begin{cases} S.t. \\ 2X_1+4X_2\le 400 \\ 6X_1+4X_2\le 600 \\ 2X_1 \qquad\quad \le 300 \end{cases}$$

$$X_1\ ,\ X_2\ge 0$$

الحل :

الخطوة (1):

نحول قيود المشكلة من الصيغة العامة الى الصيغة القياسية ولان القيود جميعها من نوع اصغر من او يساوي ،لذا فان عملية التحويل تتطلب إضافة متغير راكد (مهمل slack) والذي سيرمز له بـ ($\mathbf{X}^e_i$) كالتالي :

$$\begin{cases} 2X_1+4X_2+\mathbf{1X}^e_3=400 & (1) \\ 6X_1+4X_2+\mathbf{1X}^e_4=600 & (2) \\ 2X_1+\mathbf{1X}^e_5=300 & (3) \\ X_1,X_2,\mathbf{X}^e_3,\mathbf{X}^e_4,\mathbf{X}^e_5\ge 0 & \text{شرط عدم السلبية} \end{cases}$$

الخطوة (2) :

تضاف المتغيرات الراكدة (المهملة) إلى معادلة دالة الهدف بمعاملات صفرية وكما يأتي:

$$Max(Z)=60X_1+36X_2+0\,\mathbf{X}^e_3+0\,\mathbf{X}^e_4+0\,\mathbf{X}^e_5$$

الخطوة(3)

نحول دالة الهدف إلى دالة صفرية عن طريق نقل كافة المتغيرات من الطرف الأيمن الى الطرف الأيسر من المعادلة ،لتصبح كما يأتي:

$$Max(Z)=60X_1+36X_2+0\,\mathbf{X}^e_3+0\,\mathbf{X}^e_4+0\,\mathbf{X}^e_5=0$$

– **الخطوة(4):** نقوم بإعداد جدول الحل الابتدائي والذي سيضم المتغيرات الأساسية وغير الأساسية في معادلة دالة الهدف.

ملاحظات عن إعداد الجدول :

المتغير الأساسي هو المتغير الذي يكون معامله صفر في معادلة دالة الهدف اي (x^e_3 . x^e_4 .x^e_5)

إن وضع (Z) في عمود المتغيرات الأساسية لا يعني أنها متغير أساسي إنها فقط تساعد في تحديد المتغير الداخل ولتحديد ما إذا كنا قد وصلنا للحل الأمثل.

إن القيم الموجودة في جدول الحل الابتدائي تمثل معاملات المتغيرات في معادلة دالة الهدف والقيود.

القيم التي تقابل المتغير x^e_3 هي معاملات المتغيرات في القيد (1) . أما القيم التي تقابل المتغير x^e_4 هي معاملات المتغيرات في القيد (2).و القيم التي تقابل المتغير x^e_5 هي معاملات المتغيرات في القيد (3).

في باقي خانات الجدول تتم كتابة معاملات كافة المتغيرات في القيود الوظيفية؛

– في العمود bi تتم كتابة المتاح (من القيود الوظيفية)؛

– في السطر $Z_j=\sum C_j\, x_j$ يتم ضرب معاملات المتغيرة الأولى لكافة القيود الوظيفية في معاملات متغيرات الأساس، ثم جمعها، مثلا: $(2\times0)+(6\times0)+(2\times0)=0$، و ذلك للحصول على القيمة Z_j و هكذا؛

– في السطر $Z=C_j-Z_j$ يتم طرح قيم Z_j من معاملات كافة المتغيرات في دالة الهدف (أول سطر C_j)؛

– للحصول على قيمة دالة الهدف Z يتم ضرب معاملات متغيرات الأساس (العمود الأول C_j).

– لتكن متغيرات القرار (متغيرات خارج الأساس) $x_1=0$، $x_2=0$، $x_3=0$ و بعد التعويض في قيود النموذج أعلاه نحصل على قيم متغيرات الأساس:

$x^e_3=400$ ، $x^e_4=600$ ، $x^e_5 = 300$، و الذي يعتبر حل الأساس المقبول الأول، حيث أن $Z=0$ ما يعني أن المؤسسة لازالت في بداية نشاطها و لم تقم بعملية الإنتاج.

<u>إعداد جدول الحل الأساسي الأول</u>

ci			60	36	0	0	0	$\frac{bi}{Xi}$
Cj	vj	bi	X_1	X_2	x^e_3	x^e_4	X^e_5	
0	x^e_3	400	2	4	1	0	0	$\frac{400}{2}=200$
0	x^e_4	600	6	4	0	1	0	$\frac{600}{6}=100$
0	x^e_5	300	2	0	0	0	1	$\frac{300}{2}=150$
$Z_j=\sum C_j\, xj=0$			0	0	0	0	0	
$Z=C_j-Z_j$			60	36	0	0	0	

<u>الخطوة (5)</u>: قراءة حل الأساس المقبول الموافق للجدول

– اختيار المتغير الداخل وهو المتغير الذي يمثل اكبر قيمة بإشارة موجبة في صف Z ومن الجدول اعلاه يكون X_1 هو المتغير الداخل لان قيمته(60) ويطلق على العمود الذي يضم المتغير الداخل (عمود المحور أو عمود الارتكاز)

– اختيار المتغير الخارج وهو المتغير الذي يمثل اقل قيمة موجبة من حاصل قسمة قيم $\frac{bi}{Xi}$ على قيم عمود المحور أو عمود الارتكاز ،وتهمل اية قيمة سالبة او صفرية أو غير محددة (∞).ويطلق على الصف الذي يضم المتغير الخارج (صف المحور أو صف الارتكاز) أما حاصل قسمة قيم$\frac{bi}{Xi}$ على قيم عمود المحور فهي كالآتي:

400/2=200

600/6=100

300/2=150

اذا المتغير x^e_4 هو المتغير الخارج لأنه يمثل اقل قيمة موجبة (100)

– **تحديد عنصر الارتكاز:** يمثل عنصر الارتكاز نقطة تقاطع عمود المتغيرة الداخلة مع سطر المتغيرة الخارجة $Pivot = L_p \cap C_p$، يشار إليه بدائرة في الجدول، و في مثالنا هو 6.

<u>قراءة حل الأساس المقبول الموافق للجدول:</u>

ci			60	36	0	0	0	bi/Xi
Cj	vj	bi	X_1	X_2	x^e_3	x^e_4	X^e_5	
0	x^e_3	400	2	4	1	0	0	$\frac{400}{2}=200$
0	x^e_4	600	6	4	0	1	0	$\frac{600}{6}=100$
0	x^e_5	300	2	0	0	0	1	$\frac{300}{2}=150$
Z=0			0	0	0	0	0	
$Z=C_j-Z_j$			60	36	0	0	0	

المتغير الخارج عنصر الارتكاز عمود الارتكاز صف الارتكاز

<u>إعداد جدول الحل الأساسي الثاني:</u>

– يتم تشكيل جدول السمبلكس الثاني بإدخال المتغيرة الداخلة مكان المتغيرة الخارجة؛

– تتم قسمة قيم سطر الارتكاز (L_p)في الجدول الأول على عنصر الارتكاز نفسه (L_p/P)؛

– قيم عمود الارتكاز في الجدول الأول تصبح أصفاراً في الجدول الثاني($C_p=0$)، ماعدا عنصر الارتكاز الذي يبقى مساويا للواحد($P=1$)؛

– قيم باقي الأسطر يتم حسابها عن طريق ضرب عدد في قيم سطر الارتكاز الجديدة، مع إضافة القيم القديمة للسطر (في الجدول الأول) أي: القيمة الجديدة للسطر= $(a).L_p + L_{initiale}$.

مثال: قيم السطر الأول الجديد يتم حسابها كما يلي:

$(-2)(L_p=100)+(L_i=400)=200,\ (-2)(L_p=1)+(L_i=2)=0,\ (-2)(2/3)+(4)=8/3,$
$(-2)(0)+(1)=1,\quad (-2)(1/6)+(0)=-1/3,\ (-2)(0)+(0)=0$

قيم السطر الثالث الجديد يتم حسابها كما يلي:

$(-2)(L_p=100)+(L_i=300)=100,\ (-2)(L_p=1)+(L_i=2)=0,\ (-2)(2/3)+(0)=-4/3,$
$(-2)(0)+(0)=0,\quad (-2)(1/6)+(0)=-1/3,\ (-2)(0)+(1)=1$

– يتم الحصول على قيم Z عن طريق ضرب معاملات متغيرات الأساس في bi كما يلي :

مثال: $(0\times200) + (60\times100) + (0\times100) = 6000$

– يتم الحصول على قيم Z_j عن طريق ضرب معاملات متغيرات الأساس في معاملات المتغيرات في القيود الوظيفية.

مثال: $(0\times0) + (60\times1) + (0\times0) = 60$، $(8/3\times0) + (2/3\times60) + (-4/3\times0) = 40$.

– بعدها يتم تحديد قيمة Z إن كانت مثلى، و ذلك إن كانت جميع معاملاتها سالبة أو معدومة، و في حالتنا هذه، قيمة Z مثلى لأن جميع القيم في الصف $(C_j - Z_j)$ سالبة وصفرية ، و عليه لا يتم إنشاء جدول سمبلكس ثالث بغية تحسين الحل مرة أخرى .

ملاحظة :

في مجرى البحث عن الحل الامثل وكانت جميع القيم في الصف $(C_j - Z_j)$ موجبة وصفرية يتم إنشاء جدول عن سمبلكس ثالث بغية تحسين الحل مرة أخرى

– و ذلك بدءً بحساب قيم $\frac{\mathbf{bi}}{Xi}$ و تحديد المتغيرة الداخلة و الخارجة.

– تتم قراءة حل الأساس المقبول

مع اتباع نفس الخطوات السابقة ليتم الانتقال من أول حل أساس مقبول ذو $Z=0$ إلى حل أساس مقبول آخر *إلى أن* يتم تحسين الحل الأول.

جدول الحل الاساسي الثاني :

ci			60	36	0	0	0
Cj	vj	bi	X_1	X_2	X_3	X_4	X^e_5
0	x^e_3	200	0	*8/3*	1	*−1/3*	0
60	X_1	100	1	*2/3*	0	*1/6*	0
0	x^e_5	100	0	*−4/3*	0	*−1/3*	1
$Z_j = \sum C_j\, x_j$=6000			60	40	0	10	0
$Z = C_j - Z_j$			0	−4	0	−10	0

وهو جدول الحل الأمثل لأن جميع القيم في الصف ($C_j - Z_j$) سالبة وصفرية.

ثانيا : حالة تقليل التكاليف والقيود فقط من نوع أكبر من أو يساوي($\geq$)

خطوات الحل باستخدام طريقة *Big M*:

طور هذا الأسلوب العالم *Charne*، و يقوم هذا الأسلوب على أساس إضافة معامل للمتغير الاصطناعي في دالة الهدف، و يتم حل النموذج بطريقة السمبلكس بصفة عادية. وبغية التعرف على مراحل تطبيق هذه الطريقة سوف نأخذ المثال التالي:

<u>مثال :</u>

يقوم مجمع الدجاجة الذهبية بمدينة عنابة بتغذية الدجاج لمدة شهر كامل قبل نقلها للسوق ، علما أن تغذيته تختلف وفقا للعمر و الاستهلاك الأسبوعي ،و حتى يتحقق الوزن المستهدف في نهاية الشهر يجب تشكيل خلطة من ثلاثة أنواع من الأعلاف الأولية وهي علف رقم 105، علف رقم 205 ، علف رقم 305 يحتوي كل علف على ثلاث مواد مقوية ولازمة للتغذية من المواد الغذائية .

- يتكون العلف رقم 105 من مادة M1 بواقع 2 غرام للوحدة ، ومن مادة M2 بواقع 6 غرام للوحدة ، ومادة M3 بواقع 4 غرام للوحدة.
- يتكون العلف رقم 205 من مادة M1 بواقع 4 غرام للوحدة ، ومن مادة M2 بواقع 8 غرام للوحدة ، ومادة M3 بواقع 8 غرام للوحدة.

– يتكون العلف رقم 305 من مادة M1 بواقع 2 غرام للوحدة ، ومن مادة M2 بواقع 4 غرام للوحدة ، ومادة M3 بواقع 8 غرام للوحدة.

وتحتاج الدجاجة الواحدة في خليط الأعلاف على الأقل إلى 12،16،14 غرام من المواد M1،M2 ، M3 على التوالي ،و يكلف كيلوغرام العلف رقم105 مبلغ 200 دج، بينما يكلف العلف رقم 205 مبلغ 240 دج و العلف رقم 305 مبلغ 400 دج

<u>**المطلوب :**</u> صياغة نموذج البرمجة الخطية الذي يعطي أقل التكاليف .

حل نموذج البرمجة الخطية باستخدام طريقة السمبلكس .

<u>**الحل**</u>

صياغة نموذج البرمجة الخطية

Min Z=200 x_1+240 x_2 +400 x_3 *Soumise aux contraintes*

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 \geq 12 \\ 4x_1 + 8x_2 + 8x_3 \geq 14 \\ 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 \geq 16 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

حل نموذج البرمجة الخطية باستخدام السمبلكس

كتابة النموذج على الشكل المعياري:

Min Z=200 x_1+240 x_2 +400 x_3 *Soumise aux contraintes*

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 - x^e_4 \geq 12 \\ 4x_1 + 8x_2 + 8x - x^e_5 \geq 14 \\ 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 - x^e_6 \geq 16 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

إيجاد أول حل أساس مقبول:

بما أن النموذج يحتوي على 6 متغيرات، و 3 معادلات فإنه يتم الحصول على أول حل أساسي مقبول عن طريق عدم 3متغيرات (3=3−6) و لتكن متغيرات القرار (متغيرات خارج الأساس) $x_1=0$، $x_2=0$، $x_3=0$ و بعد التعويض في قيود النموذج أعلاه نحصل على قيم متغيرات الأساس: $x^e_4 = (-12)$ ، x^e_5

= (14 −)، و(16−)=x^e_6 الذي يعتبر حل أساس غير مقبول، لأن x^e_4 , x^e_5 , x^e_6 لا تحققان قيود عدم سلبية المتغيرات، أي أن النموذج لا يتوفر على حل أساس مقبول، و عليه لا يمكن تطبيق طريقة السمبلكس لاشتراطها على توفر أول حل أساس مقبول.

و حتى يتسنى لنا توفير حل الأساس المقبول يتوجب علينا الاستعانة بمتغيرات جديدة تسمى المتغيرات المساعدة (الوهمية، الاصطناعية)، حيث تضاف متغيرة واحدة على مستوى كل قيد ليصبح النموذج كالتالي:

$Min\ Z=200\ x_1+240\ x_2+400\ x_3$ Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 2x_1+6\ x_2+4x_3-\ x^e_4\ +\ a_7 \geq 12 \\ 4\ x_1+8\ x_2+8\ x\ -x^e_5\ +\ a_8 \geq 14 \\ 2\ x_1+4\ x_2+8\ x_3\ -x^e_6\ +\ a_9 \geq 16 \end{cases}$$

$$x_1\ , x_2, x_3\ , x^e_4\ , x^e_5\ , x^e_6 \geq 0$$

بعد إضافة المتغيرات الوهمية a_7 و a_8 و a_9 يصبح النموذج مكونا من 9 متغيرات و 3 معادلات، و عليه يمكن إيجاد أول حل أساس مقبول و ذلك عن طريق عدم متغيرات 6 متغيرات (6=3−9) فيصبح حل الأساس المقبول الأول كالتالي:

$$x_2=0,\quad x_3=0,\quad x^e_4=0,\quad x^e_5=0,\quad x^e_6=0\ x_1=0,$$

$$a_7=12\qquad a_8=14\qquad a_9=16$$

يتم إضافة متغيرات الفجوة و الاصطناعية إلى دالة الهدف، بمعامل 0 لمتغيرات الفجوة و معامل M التي تمثل كمية موجبة كبيرة إلى المتغيرات الاصطناعية، أما إذا كان النموذج من نوع Max فيتم إضافة معامل ($-M$) إلى المتغيرات الاصطناعية.[1] فتكون دالة الهدف كما يلي:

[1] محمد عبد العال النعيمي و آخرون، **مرجع سبق ذكره**، ص 57.

$$Min(Z) = 200x_1 + 240x_2 + 400x_3 + 0x_4^e + 0x_5^e + 0x_6^e + \mathbf{M}a_7 + \mathbf{M}a_8 + \mathbf{M}a_9$$

$$Min(Z) = 200x_1 + 240x_2 + 400x_3 + 0x_4^e + 0x_5^e + 0x_6^e + \mathbf{M}(a_7 + a_8 + a_9)$$

نحل بطريقة **Min(Z) = − Max(− Z)**

$$Min(Z) = -\mathbf{Max}(-Z) = -200x_1 - 240x_2 - 400x_3 - 0x_4^e - 0x_5^e - 0x_6^e - \mathbf{M}a_7 - \mathbf{M}a_8 - \mathbf{M}a_9$$

بعدها يتم استخراج قيم المتغيرات الاصطناعية من القيود الوظيفية لتعويضها في دالة الهدف:

– تشكيل جدول السمبلكس الأول

ci			−200	−240	−400	0	0	0	−M	−M	−M	$\frac{bi}{Xi}$
Cj	vj	bi	X_1	X_2	X_3	x_4^e	x_5^e	x_6^e	a_7	a_8	a_9	
−M	a_7	12	2	6	4	−1	0	0	1	0	0	3
−M	a_8	14	4	8	8	0	−1	0	0	1	0	$\frac{14}{8}$
−M	a_9	16	2	4	8	0	0	−1	0	0	1	2
$Z_j = \sum C_j x = -42M$			−8 M	−18M	−20 M	M	M	M	−M	− M	− M	
$Z = C_j - Z_j$			−200+8 M	−240+18 M	−400+20 M	− M	− M	− M	0	0	0	

– يتم في هذه الحالة اختيار المتغيرة الداخلة عن طريق اختيار أكبر معامل موجب لـ M في صف ($C_j - Z_j$) أي في قيم Z و في مثالنا هذا (M 20+) هو أكبر معامل موجب و الذي يوافق المتغيرة X_3؛أي أن المتغيرة X_3 تدخل للأساس .

– يتم بعدها قسمة قيم الشعاع B على معاملات المتغيرة الداخلة، للحصول على $\frac{bi}{Xi}$ و بناء على ذلك تصبح المتغيرة الخارجة هي التي توافق أقل حاصل قسمة موجب، لتكون في مثالنا هذا a_7 ثم تحديد عنصر الارتكاز وفي هذا المثال عنصر الارتكاز هو 8

– بما أن معاملات Z تضم قيما سالبة فإن(M 42 –) ليس هو الحل الأمثل، لذا وجب علينا تحسين الحل إلى غاية الحصول على معاملات سالبة أو معدومة باعتبار أن النموذج عبارة عن تدنية بطريقة

Min(Z) = − Max(Z)

ملاحظة :عند خروج المتغير الاصطناعي من الأساس يتم تشطيب عموده ولا يظهر في الجدول الموالي كما يلي :

ci			−200	−240	−400	0	0	0	−M	~~−M~~	−M	$\frac{bi}{Xi}$
Cj	vj	bi	X_1	X_2	X_3	x^e_4	x^e_5	x^e_6	a_7	~~a_8~~	a_9	
−M	a_7	12	2	6	4	−1	0	0	1	~~0~~	0	3
−M	a_8	14	4	8	8	0	−1	0	0	~~1~~	0	$\frac{14}{8}$
−M	a_9	16	2	4	8	0	0	−1	0	~~0~~	1	2
$Z_j = \sum C_j\, x = -42M$			−8 M	−18M	−20 M	M	M	M	−M	~~−M~~	− M	
$Z = C_j - Z_j$			−200+8 M	−240+18 M	−400+20 M	− M	− M	− M	0	~~0~~	0	

– **تشكيل جدول السمبلكس الثاني**

ci			−200	−240	−400	0	0	0	−M	−M	$\frac{bi}{Xi}$
Cj	vj	bi	X_1	X_2	X_3	x^e_4	x^e_5	x^e_6	a_7	~~a_9~~	
−M	a_7	5	0	2	0	1−	$\frac{1}{2}$	0	1	~~0~~	10
−400	X_3	$\frac{7}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	1	0	$\frac{-1}{8}$	0	0	~~0~~	−14
−M	a_9	2	−2	4−	0	0	1	−1	0	~~1~~	2
$Z_j = \sum C_j\, x=$			2 M −200	2 M −400	−400	M	$\frac{-3}{2}$ M 50+	M	−M	~~−M~~	
$Z = C_j - Z_j$			M2 −	160 −2M	0	− M	$\frac{3}{2}$ M −50	−M	0	~~0~~	

المصدر: من إعداد الباحثة بناء على معطيات المثال

– تشكيل جدول السمبلكس الثالث

ci			−200	−240	−400	0	0	0	−M	$\frac{bi}{Xi}$
Cj	vj	bi	X_1	X_2	X_3	x^e_4	x^e_5	x^e_6	a_7	
−M	a_7	4	1	4	0	−1	0	$\frac{1}{2}$	1	1
−400	X_3	2	$\frac{13}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{-1}{8}$	0	4
0	x^e_5	2	2−	−4	0	0	1	−1	0	$\frac{-1}{2}$
$Z_j = \sum C_j\, x=$			−M− 100	−4 M − 200	−400	M	0	$\frac{-1}{2}$M +50	− M	
$Z = C_j - Z_j$			M+50	4 M− 40	0	− M	0	$\frac{1}{2}$M −50	0	

المصدر: من إعداد الباحثة بناء على معطيات المثال

– تشكيل جدول السمبلكس الرابع

ci			−200	−240	−400	0	0	0
Cj	vj	bi	X_1	X_2	X_3	x^e_4	x^e_5	x^e_6
−240	X_2	1	$\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{-1}{4}$−	0	$\frac{1}{8}$
−400	X_3	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{8}$	0	1	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{-3}{16}$
0	x^e_5	6	−1	0	0	−1	1	$\frac{-1}{2}$
$Z_j = \sum C_j\, x=$840−			110−	−240	−400	10	0	45
$Z = C_j - Z_j$			90−	0	0	−10	0	−45

المصدر: من إعداد الباحثة بناء على معطيات المثال

الحل الأمثل هو: $X_1=0$ $X_2=1$

$$\frac{3}{2} = X3$$

Min (Z) = −Max (−Z) = −(−840) = (840)

رابعا: الحالات الخاصة في طريقة السمبلكس

إن مشكلات البرمجة الخطية عامة ويمكن تطبيقها في مجالات واسعة وبنجاح، لكن هناك بعض الحالات الخاصة يجب مراعاتها ومن هذه الحالات:[1]

حالة فساد الأصل (الإحلال) ؛

حالة دالة الهدف غر منتهية (الحلول الغير محدودة)؛

حالة الحل المستحيل (عدم وجود حل ملائم)؛

حالةما لا نهاية من الحلول المثلى (تعدد الحلول المثلى).

أولا : حالة فساد الأصل (الإحلال)

هذه الحالة نادرة الحدوث في التطبيقات العملية وتواجهنا عندما نحل أحد النماذج بطريقة السمبلكس ونصل إلى أحد دورات الحل فنجد أن قيمة أحد المتغيرات أو أكثر تساوي إلى الصفر في عمود bi وعندما تواجهنا مثل هذه الحالة فإن هذا يعني (لا يوجد ضمان من أن قيمة دالة الهدف سوف تتحسن فيما لو استمرينا بالحل وإنما ندخل في دوامة من الدورات دون أن تؤثر على قيمة دالة الهدف).

في بعض الأحيان قد يكون هذا الإحلال وفساد الأصل وقتياً (مرحلة معينة) أي لا يستمر في الدورات اللاحقة، ولا يمكن معرفة فيما إذا كان هذا الانحلال وقتي أم أنه دائم إلا بالاستمرار بالحل إلى أن يستوفي تطبيق شروط الأمثلية .وهذه الحالة يمكن بيانها في حالة الرسم وكذلك يمكن بيانها في حالة السمبلكس وفيما يلي المثال التالي لتوضيح الحالة باستخدام طريقة السمبلكس .

مثال :

عملت شركة بيونتيك BioNTech المتخصصة بمجال التكنولوجيا الحيوية على تطوير لقاحين لعلاج مرضى كوفيد-19 بالتعاون مع شركة فايزر الأمريكية، و ظهرت النتائج إيجابية خلال المرحلة الثالثة الحاسمة من التجارب السريرية للتأكد من فاعلية اللقاح وسلامته.هذا ما دفع مدير الانتاج إلى صياغة البرنامج الخطي الذي يضمن تحقيق أعلى الايرادات من خلال الاستعانة بالجدول الموالي :

[1] -حامد عد نور الشمرتي، علي خليل الزبيدي ، (2007):مدخل الى بحوث العمليات ،دار مجدلاوي للنشر و التوزيع ، الطبعة الولى ، المملكة الهاشمية الاردنية ، عمان ، ص 42-44

الكمية المتاحة	اللقاح الثاني	اللقاح الأول	البيان / المواد الكيميائية
16	**8**	**2**	**المادة الأولى**
8	**4**	**2**	**المادة الثانية**
	18 ون	**6 ون**	**أسعار اللقاح**

ملاحظة : و ن = وحدة نقدية

1. صياغة نموذج البرمجة الخطية الذي يسمح بتعظيم الارباح.
2. حل نموذج البرمجة الخطية باستخدام طريقة السمبلكس .
3. هل يعتبر النموذج الذي صاغة هذا المدير دقيق ام لا ، وضح ذلك ؟

الحل :

1- صياغة نموذج البرمجة الخطية الذي يسمح بتعظيم الارباح.

$$Max\ (Z) = 6X1 + 18X2$$

$$\begin{cases} 2X_1 + 8X_2 \leq 16 \\ 2X_1 + 4X_2 \leq 8 \\ X_1\ ,\ X_2 \geq 0 \end{cases}$$

2- حل نموذج البرمجة الخطية باستخدام طريقة السمبلكس

أ- ايجاد النموذج القياسي :

تحويل المتراجحات إلى معادلات

$$Max\ (Z) = 6X1 + 18X2 + 0\ x^e_3 + 0x^e_4$$

$$\begin{cases} 2X_1 + 8X_2 + x^e_3 = 16 \\ 2X_1 + 4X_2 + x^e_4 = 8 \\ X_1\ ,\ X_2\ ,\ x_3^e, x^e_4 \ \square\ 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1=0 & x^e_3 = 16 \\ X_2 = 0 & x^e_4 = 8 \end{cases}$$

ب-اعداد جدول الحل الاساسي

<u>إعداد جدول الحل الأساسي الأول</u>

ci			6	18	0	0	$\frac{bi}{Xi}$
Cj	**vj**	**bi**	**X_1**	**X_2**	**X^e_3**	**X^e_4**	
0	x^e_3	16	2	8	1	0	$\frac{16}{8}=2$
0	x^e_4	8	2	4	0	1	$\frac{8}{4}=2$
$Z_j=\sum C_j\ x=0$			0	0	0	0	
$Z=C_j-Z_j$			6	18	0	0	

من الجدول أعلاه نلاحظ أن كل من X^e_3 و X^e_4 **هما متغيرات داخل الأساس و X_1،X_2**

هي متغيرات خارج الأساس للقيود وفي الدورة الأولى تم اختيار المتغير الداخل X_2 أما المتغير الخارج x^e_3 ويمكن أن يكون X^e_4 لأن النسبة كانت متساوية وفي مثل هذه الحالة يكون الاختيار مبدئيا عشوائي لتحديد المتغير الخارج ويمكن ملاحظة قيمة الصفر في عمود الحل $\frac{bi}{Xi}$

إعداد جدول الحل الأساسي الثاني

ci			6	18	0	0	$\frac{bi}{Xi}$
Cj	vj	bi	X_1	X_2	X^e_3	X^e_4	
18	X_2	2	$\frac{2}{8}$	1	$\frac{1}{8}$	0	8
0	x^e_4	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	1	0
$Z_j = \sum C_j x = 36$			$\frac{36}{8}$	18	$\frac{9}{4}$	0	
$Z = C_j - Z_j$			$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{9}{4}$	0	

أما في الدورة الثانية المتغير الداخل كان X_1 أما المتغير الخارج فهو x^e_4 لأن $bi = 0$ والمتمثلة بأصغر قيمة ممكنة، ونلاحظ استمرار بقاء القيمة الصفرية في عمود الحل $\frac{bi}{Xi}$ وأن قيمة دالة الهدف كانت كما يلي

$$Z_j = \sum C_j x = 36$$

إعداد جدول الحل الأساسي الثالث

ci			6	18	0	0
Cj	vj	bi	X_1	X_2	X^e_3	X^e_4
18	X_2	2	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
6	X_1	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	1
$Z_j = \sum C_j x = 36$			6	18	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$
$Z = C_j - Z_j$			0	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$

وهو جدول الحل الأمثل لأن جميع معاملات صف $(C_j - Z_j)$ سالبة وصفرية .

3- لا يعتبر النموذج الذي صاغة هذا المدير دقيق حيث **بلاحظ أن ليس هناك فائدة في انتاج اللقاح 1 نظرا للكميات المستهلكة لانتاجه و نظرا لسعره و أن قيمة دالة الهدف** لم تتغير **36** = Z علماً بأن التوصل إلى الحل الأمثل لعدم وجود قيم سالبة في معاملات دالة الهدف في الدورة الثانية أدى إلى دخول المتغير X_1 كمتغير أساسي والذي لم يغير قيمة دالة الهدف ، ما يعني أن كل من X_1 و X_2 لهما نفس القيم وهذا ما يدل على وجود حالة خاصة هي حالة فساد الأصل (الانحلال).

ثانيا :حالة دالة الهدف غير منتهية (الحلول الغير محدودة)

المقصود **بحالة دالة الهدف الغير منتهية أو** بالحل الغير مقيد عندما تكون منطقة الحل الملائم غير محدد لذا فإن قيمة دالة الهدف يمكن أن تزداد إلى ما لا نهاية ولا يمكن الوصول إلى الحل الأمثل وكما هو موضح في المثال التالي:

مثال :

ترغب مديرة مصنع valentina للجلود في انتاج نوعين من حقائب اليد النسائية (حقيبة ممتازة وحقيبة عادية) بسعر منافس للانواع المماثلة في السوق ، وبعد دراسة جيدة لمراحل إنتاج هذه الحقائب اتضح أن انتاج الحقيبة الواحدة من كل نوع يتطلب المرور بمرحلتين ، حيث كان الوقت اللازم لانتاج كل نوع في كل مرحلة و الطاقة المتاحة و المتوفرة بالساعة موضحة في الجدول الموالي :

المنتجات / الأقسام	الحقيبة الممتازة	الحقيبة العادية	الطاقة المتوفرة
مرحلة الخياطة	1	0	2 سا على الأقل
مرحلة التشطيب	0	1	5 سا عى الأكثر
الأسعار	2	1	

المطلوب :

1. و باعتبارك مديرا للانتاج قم بصياغة نموذج البرمجةالخطية الذي يسمح بذلك بتعظيم الأرباح +
2. حل نموذج البرمجة الخطية باستخدام طريقة السمبلكس .

3. هل النموذج الذي صاغه مدير الانتاج دقيق ؟

<u>الحل :</u>

1- صياغة نموذج البرمجة الخطية

$$\text{Max } (Z) = 2X_1 + X_2$$

$$\begin{cases} X_1 \geq 2 \\ X_2 \leq 5 \\ X_1 \ , X_2 \geq 0 \end{cases}$$

2- حل نموذج البرمجة الخطية باستخدام طريقة السمبلكس .

أ- ايجاد النموذج القياسي :

تحويل المتراجحات إلى معادلات

$$\text{Max } (Z) = 2X_1 + 1X_2 + 0\, x^e_3 + 0x^e_4 - M\, a_5$$

$$\begin{cases} 1X_1 + 0X_2 \quad -x^e_3 + a_5 = 2 \\ 0X_1 + 1X_2 + x^e_4 = \quad 5 \\ X_1 \ , X_2 \ , \quad x_3^e, x^e_4 \quad \geq 0 \end{cases}$$

ب-اعداد جدول السمبلكس :

جدول الحل الأساسي الأول :

ci			2	1	0	0	−M	$\frac{\textbf{bi}}{\boldsymbol{Xi}}$
Cj	vj	bi	X_1	X_2	X^e_3	x^e_4	$\cancel{a_5}$	
−M	a_5	2	1	0	1−	0	$\cancel{1}$	2
0	x^e_4	5	0	1	0	1	$\cancel{0}$	حالة عدم تعيين
$Z_j = \sum C_j\, x = -2$ M			− M	0	M	0	$\cancel{-M}$	
$Z = C_j - Z_j$			2+ M	1	−M	0	$\cancel{0}$	

جدول الحل الأساسي الثاني :

ci			2	1	0	0	$\frac{\mathbf{bi}}{\boldsymbol{Xi}}$
Cj	vj	bi	X_1	X_2	X^e_3	x^e_4	
2	X_1	2	1	0	1−	0	
0	x^e_4	5	0	1	0	1	
$Z_j = \sum C_j\, x = 4$			2	0	2−	0	
$Z = C_j - Z_j$			0	1	2	0	

وبما أن X^e_3 تقابل أكبر معامل موجب في صف $(C_j - Z_j)$ فبالتأكيد سيكون هو المتغير الداخل لكن كل المعاملات تحت عمود X^e_3 هي سالبة وصفرية هذا يعني أن X^e_3 تزداد بشكل غير محدود وبدون التأثير على القيود الأخرى ، حيث أن أي زيادة بمقدار وحدة واحدة تؤثر على دالة الهدف بنفس الزيادة هذا يعني أن أي زيادة في المالانهاية من X^e_3 تؤدي إلى زيادة غير محددة بالنسبة إلى Z ، لذا فأن المسألة ليس لها حل محدود ومنها نستنتج أن هناك متغير داخل لكن لا وجود للمتغير الخارج ، حتى وإن حسنا الحل بالنسبة إلى المتغير الثاني X_2 فنحصل على نفس حصيلة الجدول الثاني

2− النموذج الذي صاغه مدير الانتاج غير دقيق لوجود حالة خاصة هي حالة دالة الهدف غير منتهية حيث تحدد المتغير الذي يدخل للأساس وهو X^e_3 غير أنّ جميع معاملات عمود الارتكاز سالبة و صفرية مما يعيق تحديد المتغير الخارج من الأساس .

ثالثا :حالة الحل المستحيل (عدم وجود حل ملائم)

تحدث هذه الحالة في المسائل التي قيودها لا تحدد منطقة حل موحدة أي عدم تشارك القيود في مجال الحل وهذا بسبب في أن يكون مجال الحل فارغ ولا يمكن الوصول إلى حل ملائم لمثل هذه النماذج الرياضية ، ويمكن الكشف عن هذه الحالة حين يتم التوصل الى جدول الحل الأمثل مع بقاء المتغير الاصطناعي في الاساس .

مثال :

تنتج شركة الوفاء نوعين من المنتجات ، و يحتاج كل منتج إلى نوعين من المدخلات هي : مواد خام و يد عاملة ، ويوضح الجدول الموالي احتياجات وحدة المنتج من مدخلات الانتاج و الانتاجية لكل مدخل و الربح المتوقع لكل منها .

المنتجات / المدخلات	المنتج 1	المنتج 2	كمية المدخلات المتاحة
مواد خام	**4**	**2**	**4 كحد أقصى**
يد عاملة	**6**	**8**	**24 كحد أدنى**
الربح المتوقع	**6**	**4**	

المطلوب :

1. و باعتبارك مديرا للانتاج قم بصياغة نموذج البرمجةالخطية الذي يسمح بذلك بتعظيم الأرباح +
2. حل نموذج البرمجة الخطية باستخدام طريقة السمبلكس .
3. هل هناك حالة خاصة ؟ وضح ذلك

الحل :

1- صياغة نموذج البرمجة الخطية

$$Max\ (Z) = 6X_1 + 4X_2$$

$$\begin{cases} 4X_1 + 2X_2 \leq 4 \\ 6X_1 + 8X_2 \geq 24 \\ X_1\ ,\ X_2 \geq 0 \end{cases}$$

2- حل نموذج البرمجة الخطية باستخدام طريقة السمبلكس .

أ- ايجاد النموذج القياسي :

تحويل المتراجحات إلى معادلات.

$$Max\ (Z) = 6X_1 + 4X_2 + 0x^e_3 + 0x^e_4 - M a_5$$

$$\begin{cases} 4X_1 + 2X_2 + x^e_3 = 4 \\ 6X_1 + 8X_2 - x^e_4 + a_5 = 24 \\ X_1\ ,\ X_2\ ,\ x^e_3\ ,\ x^e_4 \geq 0 \end{cases}$$

ب – اعداد جدول السميلكس

جدول الحل الأساسي الأول :

ci			6	4	0	0	-M	$\frac{bi}{Xi}$
Cj	vj	bi	X_1	X_2	X^e_3	x^e_4	a_5	
0	X^e_3	4	4	2	1	0	0	2
-M	a_5	24	6	8	0	1-	1	3
$Z_j = \sum C_j\, x = -24M$			- 6M	-8M	0	M	-M	
$Z = C_j - Z_j$			6+6M	4+8M	0	-M	0	

X_2 يدخل للأساس

X^e_3 يخرج من الأساس

جدول الحل الأساسي الثاني:

ci			6	4	0	0	−M
Cj	vj	bi	X_1	X_2	X^e_3	x^e_4	a_5
4	X_2	2	2	1	$\frac{1}{2}$	0	0
−M	a_5	8	−10	0	−4	−1	1
$Z_j = \sum C_j\, x = 8 - 8M$			8+10 M	4	2+4M	M	−M
$Z = C_j - Z_j$			−2− 10M	0	−2−4M	−M	0

حيث توصلنا الى جدول الحل الأمثل مع بقاء المتغير الاصطناعي a_5 في الأساس

رابعا : حالة ما لا نهاية من الحلول المثلى (تعدد الحلول المثلى).

تحدث هذه الحالة عندما تكون معادلة دالة الهدف موازية لأحد قيود المسألة الذي يسهم في تحديد منطقة الحل ويحصل من ذلك أكثر من قيمة في منطقة الحل لها نفس الارتفاع مقارنة بمعادلة دالة الهدف، أي سوف يكون هناك أكثر من حل أمثل جميعها تعطي نفس قيمة دالة الهدف لكن قيمة المتغيرات تختلف في كل حل من هذه الحلول.

مثال:

تخطط شركة الشروق للإعلانات وضع برنامج للإعلان عن منتج جيد لأحد عملائها و أمام الشركة ثلاثة وسائل للإعلان عن المنتج هي : الصّحف و المجلات ، الاذاعة ،التلفزيون و الجدول الموالي يوضح تكلفة الاعلان الواحد في كل وسيلة من هذه الوسائل و عدد الاشخاص (بالمليون) الذين يصلهم الاعلان الواحد (تحت و فوق 30 عام) شهريا

	تكلفة الاعلان بالمليون دينار جزائري	عدد الاشخاص تحت سن 30 عاما	عدد الاشخاص فوق سن 30 عاما
الصحف والمجلات	2	3	1
الاذاعة	6	4	3
التلفزيون	4	1	2

وتهدف الشركة الى تحقيق الاهداف التالية :

- ✓ أن يقل عدد الاشخاص تحت 30 عاما الذين يصلهم الاعلان عن المنتج في الشهر عن 3600 مليون شحص.
- ✓ لايزيد عدد الاشخاص فوق 30 عاما الذين يصلهم الاعلان عن المنتج في الشهر عن 2100 مليون شخص .
- ✓ تكلفة الاعلان عبر الصحف و المجلات لا يقل عن 500 مليون دينار جزائري .
- ✓ تكلفة الاعلان عبر الاذاعة لا يقل عن 400 مليون دينار جزائري .

المطلوب :

1. صياغة نموذج البرمجة الخطية الذي يسمح لهذه الشركة بتقليل نكاليفها و حله باستخدام طريقة السمبلكس .
2. هل هناك حالة خاصة وضح ذلك ؟

الحل :

المتغيرات القرارية

- عدد مرات الاعلان بالصحف و المجلات في الشهر هو X_1
- عدد مرات الاعلان بالاذاعة في الشهر هو X_2
- عدد مرات الاعلان بالتليفزيون في الشهر هو X_3

1- صياغة نموذج البرمجة الخطية وحله باستخدام طريقة السمبلكس

$Min\ Z = 2X_1 + 6X_2 + 4X_3$ الهدف دالة

subject to:

$$\begin{cases} 3X_1 + 4X_2 + X_3 \leq 3600 \\ 1X_1 + 3X_2 + 2X_3 \geq 2100 \\ X_1 \geq 500 \\ X_2 \geq 400 \\ \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{cases}$$

1-1- حل نموذج البرمجة الخطية باستخدام طريقة السمبلكس .

1-1-1 ايجاد النموذج القياسي :

تحويل المتراجحات إلى معادلات

$$\begin{cases} Min\ (Z) = 2X_1 + 6X_2 + 4X_3 + 0x^e_4 + 0x^e_5 + 0x^e_6 + 0x^e_7 + Ma_8 + Ma_9 + Ma_{10} \\ 3X_1 + 4X_2 + X_3 + x^e_4 = 3600 \\ 1X_1 + 3X_2 + 2X_3 - x^e_5 + a_8 = 2100 \\ X_1 - x^e_6 + a_9 = 500 \\ X_2 - x^e_7 + a_{10} = 400 \\ \\ X_1, X_2, x_3, x^e_4, x^e_5, x^e_6, x^e_7, a_8, a_9, a_{10} \geq 0 \end{cases}$$

$Min\ (Z) = -\ MAX(Z) = -2X_1 - 6X_2 - 4X_3 - 0x^e_4 - 0x^e_5 - 0x^e_6 - 0x^e_7 - Ma_8 - Ma_9 - Ma_{10}$

2-1-1 – اعداد جدول السميلكس

جدول الحل الأساسي الأول :

ci			-2	-6	-4	0	0	0	0	-M	-M	-M	**bi** / Xi
Cj	vj	bi	X_1	X_2	X_3	x^e_4	x^e_5	x^e_6	x^e_7	a_8	a_9	a_{10}	
0	x^e_4	3600	3	4	1	1	0	0	0	0	0	0	900
-M	a_8	2100	1	3	2	0	-1	0	0	1	0	0	700
-M	a_9	500	1	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	X
-M	a_{10}	400	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	1	400
$Z_j = \sum C_j x = -3000M$			-2M	-4M	-2 M	0	M	M	M	-M	-M	-M	
$Z = C_j - Z_j$			-2+2M	-6+4M	-4+2M	0	-M	-M	-M	0	0	0	

عنصر الارتكاز هو 1

X_2 يدخل للأساس

a_{10} يخرج من الأساس و بما أن المتغير a_{10} خرج من الأساس يتم تشطيب عموده ولا يظهر في الجدول الموالي

جدول الحل الأساسي الثاني:

ci			-2	-6	-4	0	0	0	0	-M	-M	**bi** / Xi
Cj	vj	bi	X_1	X_2	X_3	x^e_4	x^e_5	x^e_6	x^e_7	a_8	a_9	
0	x^e_4	2000	3	0	1	1	0	0	4	0	0	500
-M	a_8	900	1	0	2	0	-1	0	3	1	0	300
-M	a_9	500	1	0	0	0	0	-1	0	0	1	X
-6	X_2	400	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	X
$Z_j = \sum C_j x = -2400-1400M$			-2 M	-6	-2M	0	M	M	6-3M	-M	-M	

$Z = C_j - Z_j$	$-2+2M$	0	$-4+2M$	0	$-M$	$-M$	$-6+3M$	$\cancel{0}$	0	

عنصر الارتكاز هو 3

x^e_7 يدخل للأساس a_8 يخرج من الأساس

جدول الحل الأساسي الثالث

ci			-2	-6	-4	0	0	0	0	$-M$	$\frac{bi}{Xi}$
Cj	vj	bi	X_1	X_2	X_3	x^e_4	x^e_5	x^e_6	x^e_7	a_9	
0	x^e_4	800	$\frac{5}{3}$	0	$\frac{-5}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	0	0	0	480
0	x^e_7	300	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	1	0	900
$-M$	a_9	500	1	0	0	0	0	-1	0	1	500
-6	X_2	700	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	2100
$Z_j = \sum C_j\, x = -500M-4200$			$-M-2$	-6	-4	0	2	M	0	0	
$Z = C_j - Z_j$			M	0	0	0	-2	$-M$	0	0	

عنصر الارتكاز هو $\frac{5}{3}$

X_1 يدخل للأساس x^e_4 يخرج من الأساس

جدول الحل الأساسي الرابع :

ci			−2	−6	−4	0	0	0	0	−M	bi / *Xi*
Cj	vj	bi	X_1	X_2	X_3	x^e_4	x^e_5	x^e_6	x^e_7	a_9	
−2	X_1	480	1	0	1−	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	0	0	0	X
0	x^e_7	140	0	0	1	$\frac{-1}{5}$	$\frac{-3}{5}$	0	1	0	140
−M	a_9	20	0	0	1	$\frac{-3}{5}$	$\frac{-4}{5}$	1−	0	1	20
−6	X_2	540	0	1	1	$\frac{-1}{5}$	$\frac{-3}{5}$	0	0	0	540
$Z_j=\sum C_j\,x=-4200-20M$			−2	−6	−4−M	$\frac{3}{5}M$	$2+\frac{4}{5}M$				
$Z=C_j-Z_j$			0	0	M	$\frac{-3}{5}M$	$-2\ \frac{-4M}{5}$	M−	0	0	

عنصر الارتكاز هو 1

X_3 يدخل للأساس a_9 يخرج من الأساس

و بما أن المتغير a_9 خرج من الأساس يتم تشطيب عموده و لا يظهر في الجدول الموالي

جدول الحل الاساسي الخامس:S1

ci			−2	−6	−4	0	0	0	0	bi / *Xi*
Cj	vj	bi	X_1	X_2	X_3	x^e_4	x^e_5	x^e_6	x^e_7	
−2	X_1	500	1	0	0	0	0	−1	0	X
0	x^e_7	120	0	0	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	1	300
−4	X_3	20	0	0	1	$\frac{-3}{5}$	$\frac{4-}{5}$	−1	0	X
−6	X_2	520	0	1	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	0	1300
$Z_j=\sum C_j\,x=4200$			−2	−6	−4	0	2	0	0	
$Z=C_j-Z_j$			0	0	0	0	−2	0	0	

توصلنا إلى جدول الحل الأمثل مع وجود حالة خاصة هي حالة مالا نهاية من الحلول المثلى حيث أن معاملي C_J-Z_J للمتغيرين x^e_4 وx^e_6 (متغيرين خارج الأساس) معدومين و للبحث عن الحلول المثلى الأخرى نحسب الحل الأساسي السادس بادخال احدى المتغيرين x^e_4 أو x^e_6 في الأساس .

جدول الحل الأساسي السادس: S2

ci			−2	−6	−4	0	0	0	0
Cj	vj	bi	X_1	X_2	X_3	x^e_4	x^e_5	x^e_6	x^e_7
−2	X_1	500	1	0	0	0	0	1−	0
0	x^e_4	300	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$
−4	X_3	200	0	0	1	0	$\frac{1}{2}-$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
−6	X_2	400	0	1	0	0	0	0	1−
$Z_j=\sum C_j\, x=4200$			−2	−6	−4	0	2	0	0
$Z=C_j-Z_j$			0	0	0	0	−2	0	0

يمكن ايجاد باقي الحلول المثلى من خلال مايلي :

$$\lambda S_1+(1-\lambda)\, S_2$$

حيث : $1 \leq \lambda \leq 0$ لكل قيمة λ بين 0 و 1 يقابلها حل أمثل ($Z=4200$) *مثلا إذا اخترنا* $\lambda = 0.5$ نجد :

	S1	S2	S3 λ =0.5
X_1	500	500	500
X_2	520	400	460
X_3	20	200	110
X^e_4	0	300	150
X^e_5	0	0	0
X^e_6	0	0	0
X^e_7	120	0	60
Z	4200	4200	4200

الفصل الرابع

المسألة المعكوسة

(النموذج المقابل)

الفصل الرابع: المسألة المعكوسة (النموذج المقابل)

تمهيد:

من الظواهر المهمة المصاحبة لمسائل البرمجة الخطية الثنائية والتي تعرف بتحوير نموذج البرمجة الخطية الأولى إلى النموذج الثنائية. ويختص النموذج الثنائي بسهولة حله عند حصول أي تغير في معاملات وإتاحة المتغيرات في النموذج الأولي بعد صياغته وحله، وتستخدم هذه الخاصية في تسهيل ظاهرة الحساسية لنموذج البرمجة الخطية (Sensitivity Analysis).

أولا :تعريف النموذج الثنائي (المقابل)

يعرف النموذج الثنائي بأنه النموذج المائل للنموذج الأولي لصياغة مسائل البرمجة الخطية. ويرمز النموذج الثنائي الكثير من المعلومات التي يمكن أن تفيد إدارة العمليات الصناعية في سهولة اتخاذ القرارات، بالإضافة إلى تقليل العمليات الحسابية التي أصبحت سهلة بواسطة الحاسوب وتحتاج إلى وقت أقل في حالة توفر عدد كبير من القيود والمتغيرات عنها في النموذج الأول. حيث يقترن أي نموذج أصلي (*Primal*) عادة بنموذج آخر يطلق عليه النموذج المرافق (*Dual*) (المقابل/الثنائي).[1]

ثانيا:أهمية النموذج الثنائي :

تتمثل أهمية الثنائية في مسائل البرمجة الخطية فيما يلي:

- ✓ حل مشكلة البرمجة الخطية ومن خلال المشكلة الثنائية (النموذج المقابل) قد يكون اسهل من حلها من خلال المشكلة الاولية (عندما يكون من الممكن اختصار عدد القيود في المشكلة الثنائية) ؛
- ✓ يعيد النموذج الثنائي(المقابل) أثر التغيرات في معاملات دالة الهدف وثوابت الطرف الايمن ومعرفة المجال الذي تتحقق فيه نتائج الحل الامثل؛

[1] –منعم زمزير الموسوي، (2009) : **بحوث العمليات–مدخل علمي لاتخاذ القرارات**–، دار وائل للنشر، عمان، الأردن، الطبعة الأولى، ص 152.

- ✓ يعطي النموذج الثنائي (المقابل) كثيرا من الحقائق الاقتصادية التي تساعد على تفهم أبعاد المشكلة وبخاصة فيما يتعلق بأسعار الظل؛
- ✓ تقليص الجهد الحسابي المطلوب في تحليل مسألة البرمجة الخطية التي تحتوي على عدد كبير من القيود وهذا له فوائد كبيرة في استخدامات وتطبيقات متعددة؛
- ✓ تشير الثنائية في البرمجة الخطية إلى إن كل برنامج خطي مكافئ إلى مباراة بين شخصين ذات مجموع صفري وهذا يؤكد وجود علاقة بين طريقة البرمجة الخطية ونظرية المباراة ؛
- ✓ بإمكان الحصول على الحل الأمثل للمسألة الثنائية من جدول الحل الأمثل الأولية مباشرة والعكس صحيح ولعل من المفيد اختيار المسألة التي تحتوي عدد قليل من القيود والتي تعتبر ملائمة أكثر للحسابات التكرارية أو بالنسبة للبرامج الجاهزة في الكومبيوتر؛
- ✓ إذا كان ألحد متغيرات النموذج الأول قيمة سالبة فتن حل النموذج هذا غير ممكن بينما في حالة النموذج المقابل يمكن إيجاد حل للمشكلة عند وجود متغير ذي قيمة سالبة .

ثالثا: الخطوات العامة لتكوين المشكلة الثنائية (النموذج الثنائي المقابل)

- ✓ يتمّ تحديد متغير بديل غير سالب لكل قيد من قيود المشكلة الاولية ؛
- ✓ معاملات دالة الهدف في المشكلة الاولية تصبح ثوابت الطرف الايمن لقيود المسالة الثنائية؛ ثوابت الطرف الايمن في المشكلة الاولية تصبح معاملات دالة الهدف في المشكلة الثنائية؛
- ✓ تغيير ترميز المتغيرات من النموذج الأصلي إلى النموذج المقابل ($x_1 \dots x_n$ تصبح $y_1 \dots y_n$). و بناء على ذلك يصبح عدد متغيرات النموذج الثنائي مساويا لعدد قيود البرنامج الأولي؛

- ✓ تعكس اتجاه القيود في المشكلة الثنائية الى الاتجاه الاخر عندما كانت عليه القيود في المشكلة الاولية فاذا كانت القيود مثلا من نوع اكبر او يساوي في المشكلة الاولية فإنها تعكس في المسالة الثنائية الى أقل او يساوي والعكس صحيح ؛
- ✓ يعكس اتجاه دالة الهدف فإذا كانت تعظيم Max دالة الهدف في احد النموذجين فيقلب الى تصغير في النموذج الاخر او بالعكس كما يلي :

$$\begin{cases} Max\ (Z) = C'x \\ s/c \quad Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} Min\ (W) = b'y \\ s/c \quad A'y \geq C \\ y \geq 0 \end{cases}$$

رابعا :القواعد الأساسية لتشكيل النموذج الثنائي:

النموذج الأصلي (الاولي) *(Primal)*	النموذج (المقابل) *(Dual)*
دالة الهدف	**دالة الهدف**
Max Z	***Min W***
Min Z	***Max W***
الطرف الأيمن (الثاني) للقيود	**معاملات دالة الهدف**
معاملات دالة الهدف	**الطرف الأيمن (الثاني) للقيود**
المتغيرات	**القيود**
عدد المتغيرات	**عدد القيود**
$xj \geq 0$	**القيد j متراجحة (من الشكل اكبر أو يساوي ≥)**
$xj \leq 0$	**القيد j متراجحة (من الشكل اقل أو يساوي ≤)**
xj غير محدد الإشارة	**القيد j معادلة (من الشكل =)**
القيود	**المتغيرات**
عدد القيود	**عدد المتغيرات**
القيد i معادلة (من الشكل =)	**Yi غير محدد الإشارة**

القيد i متراجحة (من الشكل اقل أو يساوي ≤)	**$y_i \geq 0$**
القيد i متراجحة (من الشكل اكبر أو يساوي ≥)	**$y_i \leq 0$**
القيد i متراجحة (من الشكل اكبر أو يساوي ≥) بالضرب في (− 1) تصبح اقل أو يساوي ≤)	**$y_i \geq 0$**

أمثلة حول تحويل البرنامج الأصلي إلى البرنامج المرافق حسب معايير الجدول أعلاه :

مثال 01 : حالة دالة الهدف *Max Z* و *جميع القيود* من الشكل(اقل أو يساوي ≤)

ليكن نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Max\ Z = 400\ x_1+500\ x_2 +800\ x_3$$

$$\begin{cases} \text{Soumise aux contraintes} \\ 3x_1+3x_2 +4x_3 \leq 2000 \\ 6x_1+1x_2+6\ x_3 \leq 4000 \\ 4x_1+5x_2 +3\ \ x_3 \leq 6000 \\ 7\ x_1+8\ x_2+2\ x_3 \leq 1500 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geq\ 0 \end{cases}$$

نلاحظ أن النموذج يحتوي على 3 متغيرات و التي تمثل 3 أنواع من المنتجات، تعتمد المؤسسة في إنتاج هذه المنتجات على 4 موارد متاحة، حيث أنها تسعى من خلال هذه العملية إلى تعظيم الأرباح المترتبة عن بيع هذه المنتجات، في المقابل سيسعى مشتري هذه المنتجات إلى تدنية تكاليف شرائها مع تحفيز صاحب المؤسسة على البيع، فتصبح دالة الهدف الخاصة بهذا المشتري من نوع تدنية:

$$Min\ W = 2000\ y_1+4000\ y_2 +6000\ y_3 +1500\ y_4$$

حيث تمثل ($y_1,\ y_2\ ,\ y_3\ ,\ y_4$) أسعار المواد الأولية.

أما القيود فتصبح من الشكل :

$$\begin{cases} 3\,y_1+6\,y_2+4\,y_3+7y_4 \geq 400 \\ 3y_1+1y_2+5y_3+8y_4 \geq 500 \\ 4y_1+6y_2+3y_3+2y_4 \geq 800 \end{cases}$$

و عليه فإن النموذج الثنائي أو المقابل للنموذج الأولي أعلاه يكون من الشكل:

$$Min\ W = 2000\,y_1+4000\,y_2+6000\,y_3+1500\,y_4$$

$$\begin{cases} 3\,y_1+6\,y_2+4\,y_3+7y_4 \geq 400 \\ 3y_1+1y_2+5y_3+8y_4 \geq 500 \\ 4y_1+6y_2+3y_3+2y_4 \geq 800 \end{cases}$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

مثال 02 : حالة دالة الهدف *Max Z* مع ظهور القيد *i* بإشارة أكبر أو يساوي ≥

ليكن لدينا نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Max\ Z = 10\,x_1+20\,x_2+30x_3$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 4x_1+2x_2+5x_3 \leq 200 \\ 2x_1+3x_2+2x_3 \geq 250 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

يلاحظ أن القيد الثاني لا يحقق شرط الشكل النموذجي للنموذج أعلاه، لذا وجب تحويله إلى متراجحة من الشكل أقل أو تساوي بضرب طرفيها في القيمة (-1)، فيصبح:

$$-2x_1-3x_2-2x_3 \leq -250$$

و عليه يصبح النموذج الثنائي كالتالي:

Min $W = 200\ y_1 - 250\ y_2$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 4y_1 - 2y_2 \geq 10 \\ 2y_1 - 3y_2 \geq 20 \\ 5y_1 - 2y_2 \geq 30 \\ \quad y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

مثال 03: حالة دالة الهدف *Max Z* مع ظهور القيد *i* بإشارة تساوي =

ليكن لدينا نموذج البرمجة الخطية التالي:

Max $Z = 280\ x_1 + 450\ x_2$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 10x_1 + 15x_2 \leq 140 \\ 15x_1 + 20x_2 = 150 \end{cases}$$

$$x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3 \geq 0$$

يلاحظ أن القيد الثاني لا يحقق شرط الشكل النموذجي للنموذج أعلاه كونه مكتوبا في صورة معادلة، لذا وجب تحويله إلى متراجحتين إحداهما أقل أو تساوي و الأخرى أكبر أو تساوي، فيصبح :

$$15x_1 + 20x_2 \leq 150$$

$$15x_1 + 20x_2 \geq 150$$

قبل الانتقال الى النموذج المقابل لابد من التأكد من أنّ جميع إشارات القيود تحقق شرط الشكل النموذجي و بما أن المتراجحة الثانية تحقق هي الأخرى شرط الشكل النموذجي لنموذج التعظيم فيجب هي الأخرى تعديلها و ذلك بضرب طرفيها في (-1) لتصبح من الشكل :

$$-15x_1 - 20x_2 \leq -150$$

و بناءا على ذلك يصبح الشكل النموذجي للنموذج الأولي كما يلي:

Max $Z = 280\,x_1 + 450\,x_2$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 10x_1 + 15x_2 \leq 140 \\ 15x_1 + 20x_2 \leq 150 \\ -15x_1 - 20x_2 \leq -150 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

و عليه يمكن استنتاج النموذج الثنائي للنموذج أعلاه، فيكون كما يلي:

Min $W = 140\,y_1 + 150\,y'_2 - 150\,y''_2$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 10y_1 + 15\,y'_2 - 15y''_2 \geq 280 \\ 15y_1 + 20\,y'_2 - 20\,y''_2 \geq 450 \\ y_1,\ y'_2,\ y''_2 \geq 0 \end{cases}$$

$\text{Min } W = 140\, y_1 + 150\, (y'_2 - y''_2)$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 10y_1 + 15(y'_2 - y''_2) \geq 280 \\ 15y_1 + 20(y'_2 - y''_2) \geq 450 \\ y_1,\ y'_2,\ y''_2 \geq 0 \end{cases}$$

ما يلاحظ أن النموذج المقابل يحتوي على 3 متغيرات في حين أنه من المفروض وجود متغيرتين فقط باعتبار أن النموذج الأصلي يحتوي على قيدين فقط، لذلك وجب علينا تعديل البرنامج المرافق و ذلك بوضع:

$$\mathbf{y'_2 - y''_2 = y_2}$$

فيصبح الشكل النهائي للنموذج المرافق كما يلي:

$\text{Min } W = 140\, y_1 + 150\, y_2$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 10y_1 + 15\, y_2 \geq 280 \\ 15y_1 + 20y_2 \geq 450 \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \in R \end{cases}$$

و وفقا لذلك قد تكون:

$y_2 > 0$ إذا كانت: $y'_2 > y''_2$

$y_2 < 0$ إذا كانت: $y'_2 < y''_2$

$y'_2 = y''$ إذا كانت: $y_2 = 0$

مثال 04: حالة دالة الهدف *Max Z* مع ظهور متغيرة j غير محددة الاشارة $(x_j \in R)$

ليكن لدينا نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\begin{cases} Max\ Z = 6x_1 + 3x_2 \\ \text{Soumise aux contraintes} \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 200 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 300 \\ 3x_1 + 1x_2 \leq 400 \\ x_1 \in R,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

ما يلاحظ من النموذج أعلاه أنه ليس في شكله النموذجي باعتبار أن المتغيرة الأولى غير محددة الإشارة لذا وجب تعديله، بتعويض المتغيرة الأولى بفرق متغيرتين $(x_1 = x'_1 - x''_1)$، ليصبح كما يلي:

$$Max\ Z = 6(x'_1 - x''_1) + 3x_2$$

$$\begin{cases} \text{Soumise aux contraintes} \\ 4(x'_1 - x''_1) + 2x_2 \leq 200 \\ 4(x'_1 - x''_1) + 3x_2 \leq 300 \\ 3(x'_1 - x''_1) + 1x_2 \leq 400 \\ x'_1,\ x''_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Max } Z = 6\,\mathbf{x'_1} - \mathbf{6x''_1} + 3\,x_2$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 4\mathbf{x'_1} - \mathbf{4x''_1} + 2x_2 \le 200 \\ 4\mathbf{x'_1} - \mathbf{4\,x''_1} + 3x_2 \le 300 \\ 3\mathbf{x'_1} - \mathbf{3\,x''_1} + 1x_2 \le 400 \\ \mathbf{x'_1},\ \mathbf{x''_1},\ x_2,\ x_3 \ge 0 \end{cases}$$

و عليه يصبح شكل النموذج الثنائي للنموذج الأولي أعلاه كما يلي:

$$\text{Min } W = 200\,y_1 + 300y_2 + 400'y_3$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 4y_1 + 4y_2 + 3y_3 \ge 6 \\ -4y_1 - 4y_2 - 3y_3 \ge -6 \\ 2y_1 + 3\mathbf{y_2} + 1y_3 \ge 3 \\ y_1,\ y_2,\ y_3 \ge 0 \end{cases}$$

ملاحظة:

سبق و أن تمت الإشارة إلى أن عدد متغيرات النموذج الأولي يجب أن تكون مساوية لعدد قيود النموذج المرافق، و هذا ما لا يحققه النموذج أعلاه، لذا وجب علينا تعديله بضرب القيد الثاني في (−1)، و ذلك بغية كتابة القيدين الأول و الثاني في شكل مساواة، فيصبح الشكل النهائي للنموذج الثنائي كما يلي:

Min W = 200 y_1 + 300y_2+ 400'y_3

Soumise aux contraintes

$4y_1 + 4y_2 + 3y_3 \geq 6$

$4y_1 + 4y_2 + 3y_3 \leq 6$

$2y_1 + 3\mathbf{y_2} + 1y_3 \geq 3$

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$

وعليه يصبح النموذج المقابل كما يلي :

Min W = 200 y_1 + 300y_2+ 400'y_3

Soumise aux contraintes

$4y_1 + 4y_2 + 3y_3 = 6$

$2y_1 + 3\mathbf{y_2} + 1y_3 \geq 3$

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$

ملاحظة :

وعليه فإن ظهور المتغيرة رقم *j* غير محددة الإشارة *(y_i Î R)* في نموذج التعظيم الأولي (*Max*)، يؤثر على القيد رقم *j* فيظهر بالإشارة (=) في نموذج التدنية الثنائي.

مثال 05: حالة دالة الهدف Max (Z) مع جود متغيرة j أقل أو تساوي $(x_j \leq 0)$:

ليكن لدينا نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Max\ Z = 45x_1 + 40\,x_2 + 60\,x_3$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 4x_1 + 6\,x_2 + 2\,x_3 \leq 35 \\ 2x_1 + 2x_2 + 7\,x_3 \leq 40 \\ 9x_1 + 8x_2 + 3\,x_3 \leq 65 \\ \mathbf{x_1 \leq 0},\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

يلاحظ أن النموذج أعلاه غير مكتوب في شكله النموذجي باعتبار أن المتغيرة الأولى أقل أو تساوي الصفر، و لذلك وجب تعديل النموذج بحيث نضع: $\mathbf{x_1 = -\,x'_1}$ فيصبح الشكل النموذجي كما يلي:

$$Max\ Z = -45\,x'_1 + 40\,x_2 + 60\,x_3$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} -4\,x'_1 + 6\,x_2 + 2\,x_3 \leq 35 \\ -2\,x'_1 + 2x_2 + 7\,x_3 \leq 40 \\ -9\,x'_1 + 8x_2 + 3\,x_3 \leq 65 \\ \mathbf{x'_1},\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

و بناء عليه يصبح شكل النموذج الثنائي كما يلي:

Min $W = 35\ y_1 + 40\ y_2 + 65\ y_3$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} -4y_1 - 2y_2 - 9y_3 \geq -45 \\ 6y_1 + 2y_2 + 8y_3 \geq 40 \\ 2y_1 + 7y_2 + 3\ y_3 \geq 60 \\ y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0 \end{cases}$$

وعليه يصبح النموذج المقابل للنموذج الاولي كما يلي :

Min $W = 35y_1 + 40\ y_2 + 65\ y_3$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 4y_1 + 2y_2 + 9y_3 \leq 45 \\ 6y_1 + 2y_2 + 8y_3 \geq 40 \\ 2y_1 + 7y_2 + 3y_3 \geq 60 \\ y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0 \end{cases}$$

مثال 06 : حالة دالة الهدف Min (Z) و جميع القيود من الشكل(اكبر أو يساوي ≥)

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

Min $Z = 2x_1 + 3\ x_2$

$$\begin{cases} x_1 \geq 250 \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 450 \\ 4\ x_1 + 3x_2 \leq 850 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

وعليه يكون النموذج المقابل كما يلي :

$$Max\ Z = 250x_1 + 450\ x_2 + 850\ x_3$$

$$\begin{cases} \text{Soumise aux contraintes} \\ 1y_1 + 3y_2 + 4y_3 \leq 2 \\ 4y_2 + 3y_3 \leq 3 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

5- كيفية معرفة أو قراءة الحل الأمثل الثنائي من جدول الحل الأمثل الأولي و بالعكس

معامل المتغير الراكد ($+x^e_i$) من صف (Z) في جدول الحل الأمثل	=	**القيمة المثلى للمتغير الثنائي (Yi) إذا إ كان القيد من النوع أقل ويساوي**
(-) معامل المتغير الراكد($- x^e_i$) من صف (Z) في جدول الحل الأمثل	=	**القيمة المثلى للمتغير الثنائي (Yi) إذا إ كان القيد كان القيد من نوع أكبر ويساوي**
(M) ± معامل المتغير الراكد (ai) من صف (Z) في جدول الحل الأمثل	=	
(M) ± معامل المتغير الراكد (ai) من صف (Z) في جدول الحل الأمثل	=	**القيمة المثلى للمتغير الثنائي (Yi) إذا كان القيد من نوع مساواة**

يتم إضافة (M-)إذا كانت الدالة من نوع Max وكذلك إضافة (M +)إذا كانت الدالة من نوع Min وتعرف القمة المثلى الثنائية أو ما تسمى بأسعار الظل بأنها مقدار الزيادة أو النقصان في دالة الهدف نتيجة زيادة أو نقصان في الكميات المتاحة من ذلك المورد النادر بمقدار وحدة واحدة .وعند زيادة الكمية

المتاحة من مورد معين بمقدار وحدة واحدة سوف يترتب على ذلك زيادة الربح المتحقق بمقدار معين ، ويطلق على هذه الزيادة في الربح والحاصلة نتيجة الحصول على وحدة واحدة إضافية من تلك الموارد بمصطلح (سعر الظل).

مثال01: إذا كان لديك نموذج البرمجة الخطية التالي :

Max $Z = 240x_1 + 200\ x_2$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 4x_1 + 4\ x_2 \le 16 \\ 10x_1 + 6x_2 \le 30 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

المطلوب :

1. أوجد الحل الأمثل الثنائي من جدول الحل الأمثل الأولي.

الحل :

1-إيجاد الحل الأمثل الثنائي من جدول الحل الأمثل الأولي.

يتم إيجاد جدول الحل الأمثل الأولي ومن بعدها يتم إيجاد الحل الأمثل الثنائي وكالاتي:

أ- إيجاد النموذج القياسي (تحويل المتراجحات إلى معادلات)

Max $Z = 240x_1 + 200\ x_2 + 0\ X^e_3 + 0X^e_4$

$$\begin{cases} 4x_1 + 4\ x_2 + X^e_3 = 16 \\ 10x_1 + 6x_2 + X^e_4 = 30 \\ x_1,\ x_2,\ X^e_3,\ X^e_4 \ge 0 \end{cases}$$

ب-**اعداد جدول السمبلكس**

جدول الحل الأساسي الأول:

Ci			240	200	0	0	$\frac{b_i}{X_i}$
Cj	Vj	bi	X_1	X_2	X_3^e	X_4^e	
0	X_3^e	16	4	4	1	0	4
0	X_4^e	30	10	6	0	1	3
Z_i=0			0	0	0	0	
$Z = Ci - Zi$			240	200	0	0	

X_1 يدخل للأساس

X_4^e يخرج من الأساس

جدول الحل الأساسي الثاني:

Ci			240	200	0	0	$\frac{b_i}{X_i}$
Cj	Vj	bi	X_1	X_2	X_3^e	X_4^e	
0	X_3^e	4	0	$\frac{8}{5}$	1	$\frac{2-}{5}$	2.5= $\frac{20}{8}$
240	X_1	3	1	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{1}{10}$	5
Z_i=0			240	144	0	24	
$Z = Ci - Zi$			0	56	0	−24	

X_2 يدخل للأساس

X_3^e يخرج من الأساسي

جدول الحل الأساسي الثالث:

Ci			240	200	0	0
Cj	Vj	bi	X_1	X_2	X_3^e	X_4^e
200	X_2	$\frac{20}{8}$	0	1	$\frac{5}{8}$	$\frac{-2}{8}$
240	X_1	$\frac{3}{2}$	1	0	$\frac{-3}{8}$	$\frac{1}{4}$
Z_i=860			240	200	35	10
$Z = Ci - Zi$			0	0	−35	−10

وهو جدول الجل الأمثل حيث :

الحل الأمثل للنموذج الثنائي الموافق للنموذج الأولي أعلاه هو التالي:

أ- **متغيرات القرار:** بما أن النموذج الأولي على شكله النموذجي فإن: y_i هي Z_j لمتغيرة الفجوة S_i، و عليه:

$$Z_i=860 \quad , \quad y_2= 10, \qquad y_1=35 \qquad X_2=\frac{20}{8} \qquad X_1= \frac{3}{2}$$

ب- **متغيرات الفجوة:** بما أن النموذج من الشكل (Max) فإن:$k_i = -(C_j - Z_j)$

$$k_1= 0, \quad k_2= 0$$

مثال 02: ليكن النموذج الأولي التالي

$\text{Max } Z = 120x_1 + 100\ x_2$ ⇐ النموذج الأولي

$$\begin{cases} \text{Soumise aux contraintes} \\ 2x_1 + 2\ x_2 \leq 8 \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ x_1,\ x_2, \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب

1. صغ النموذج المقابل.
2. **إيجاد الحل الأمثل الأولي من جدول الحل الأمثل الثنائي.**

الحل :

$\text{Min } W = 8\ y_1 + 15\ y_2$ ⇐ **النموذج الثنائي(المقابل)**

$$\begin{cases} \text{Soumise aux contraintes} \\ 2y_1 + 5y_2 \geq 120 \\ 2y_1 + 3y_2 \geq 100 \\ y_1,\ y_2\ .y_3\ .y_4\ .\ a_5\ .\ a_6. \geq 0 \end{cases}$$

أ- إيجاد النموذج القياسي (تحويل المتراجحات إلى معادلات)

$\text{Min } W = 16\ y_1 + 30\ y_2 + 0\ \ y^e_3\ + 0\ \ y^e_4 + \ M\ a_5\ \ +Ma_6$

$$\begin{cases} 2y_1 + 5y_2 - \ y^e_3\, y_3 \quad + \ a_5 \qquad = 120 \\ 2y_1 + 3y_2 - y^e_4 \quad + \quad a_6 \qquad = 100 \\ y_1,\ y_2\ .\ y^e_3,\ \ y^e_4 \quad \geq 0 \end{cases}$$

ب-اعداد جدول السمبلكس

جدول الحل الأساسي الأول :

ci			-8	-15	0	0	-M	-M	$\frac{bi}{Xi}$
Cj	vj	bi	y_1	y_2	y_3	y_4	a_5	a_6	
-M	a_5	120	2	5	1-	0	1	0	24
-M	a_6	100	2	3	0	-1	0	1	50
$Z_j=\sum C_j x=-220$ M			-4 M	-8M	M	M	-M	-M	
$Z=C_j-Z_j$			-8+4 M	-15+8 M	-M	-M	0	0	

Y_2 يدخل للأساس

a_5 يخرج من الأساس

جدول الحل الأساسي الثاني

ci			-8	-15	0	0	-M	-M	$\frac{bi}{Xi}$
Cj	vj	bi	y_1	y_2	y_3	y_4	a_5	a_6	
-15	y_2	24	$\frac{2}{5}$	1	$\frac{-1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	0	60
-M	a_6	28	$\frac{4}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	-1	$\frac{-3}{5}$	1	35
$Z_j=\sum C_j x=-28$ M-360			$-\frac{4}{5}M-6$	-15		M		-M	
$Z=C_j-Z_j$			$\frac{4}{5}M-2$	0	$\frac{3}{5}M-3$	-M	$\frac{-8}{5}M+3$	0	

Y_1 يدخل للأساس

a_6 يخرج من الأساس

جدول الحل الأساسي الثالث

ci			-8	-15	0	0	$-M$	$-M$
Cj	vj	bi	y_1	y_2	y_3	y_4	a_5	a_6
-15	y_2	10	0	1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$
-8	y_1	35	1	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{4}$	$\frac{-3}{4}$	$\frac{5}{4}$
$Z_j=\sum C_j\, x = -430$			-8	-15	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}-$	$-\frac{5}{2}$
$Z = C_j - Z_j$			0	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}-\ \ M$	$\frac{5}{2}-\ \ M$

وهو جدول الحل الأمثل وعليه فان الحل الأمثل الثنائي يكون كما يلي :

حيث $\boldsymbol{Z_i}$**=430** **y_1=35 , y_2= 10,** $\boldsymbol{X_2=\frac{5}{2}}$ $\boldsymbol{X_1=\frac{3}{2}}$

Min (W) = − Max (Z)

الفصل الخامس

تحليل الحساسية

الفصل الخامس: تحليل الحساسية (Sensitivity Analysis)

تمهيد:

عند استخدام نموذج البرمجة الخطية لحل مختلف المشاكل الإدارية والإنتاجية تأخذ معاملات النموذج **(c_j,b_i,a_{ij})** على إنها قيم ثابتة، ولكن في الواقع تكون قيم المعاملات المستخدمة في النموذج هي مجرد تخمينات أو تقديرات ممكن أن تكون غير ناضجة وعلى هذا الأساس فإن قيم المعاملات قد تكون تقديرات مغالى بها أو تقديرات بخسة، لذلك فإن الحل الأمثل الذي يتم التوصل إليه يمثل حل أمثل للنموذج وقد يمثل بداية حل للمشكلة موضوع الدراسة **وعليه فإنه من المهم أن يتم إيجاد الحل الأمثل مرة أخرى عند إتاحة المعلومات الأكثر دقة حتى يعد حل المسائل، وهذا ممكن أن يحصل بدون إعادة حل المسألة الأصلية من البداية، وفي بعض الأحيان أن بعض المتغيرات يحصل عليها تغير أثناء عملية صياغة المسألة وقبيل بدأ الحل أو في إحدى مراحل الحل ، بالإضافة إلى ذلك أن بعض القيود لا تكون مساوية تماماً عند الحصول على الحل الأمثل وبالتالي يجب النظر في هذه الإنتاجية من خلال وجود الحل الأمثل، ويمكن أن يضاف قيد آخر بعد حل المسألة نظراً للتطورات التي تحصل في المسألة من البداية** ، وعلى هذا الأساس فإن من الضروري دراسة التغيرات التي تحدث في الحل الأمثل نتيجة للتغيرات الحاصلة في معاملات النموذج وهذا ما يعرف **بتحليل الحساسية** [1].

أولا : تحليل الحساسية

إن الهدف الأساسي لتحليل الحساسية هو تحديد هذه المعاملات الحساسة بشكل بارز لأجراء تخمين أكثر دقة لها، إن إجراء أي تغيير في النموذج الأصلي سيؤدي إلى تغيير أرقام جدول السمبلكس النهائي لذلك فمجرد أجراء حسابات بسيطة لتعديل هذا الجدول يتم معرفة ما إذا كان الحل الأمثل الأصلي هو

[1] - حامد عد نور الشمرتي، علي خليل الزبيدي ، (2007):مرجع سابق ، ص 106

الآن امثل أم لا، فإذا كان غير أمثل فيستعمل كحل ممكن أساسي لإعادة بدء طريقة السمبلكس للوصول إلى الحل الأمثل الجديد، ولتوضيح حالات تحليل الحساسية نستعين بالمثال الآتي:

مثال:

تقوم شركة"elio" بإنتاج ثلاثة أحجام من قوارير الزيت النباتي (قارورة متوسطة الحجم ذات سعة 2.5 لتر، قارورة صغيرة الحجم ذات سعة 1 لتر، قارورة كبيرة الحجم ذات سعة 5 لتر و تتطلب عملية الإنتاج هذه ساعات عمل ومواد أولية معينة وعلى هذا الأساس تم تكوين أنموذج برمجة خطية **(L.P.)** لتحديد الإنتاج الأمثل لتعظيم ربح الشركة:

$$Max \quad Z = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3$$

$$S.T$$

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 20 & \text{ساعات العمل} \\ 2X_1 + 2X_2 + 3X_3 \leq 45 & \text{مواد أولية} \end{cases}$$

$$X_1 \text{، } X_2\text{،}X_3 \,, \quad \geq ,0$$

المطلوب : حل نموذج البرمجة الخطية السابق باستخدام طريقة السمبلكس

الحل:

ايجاد النمودج القياسي (تحويل المتراجحات إلى معادلات)

$Max \quad Z = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 0\, X_4^e + 0X_5^e$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 1x_1+2x_2+1x_3 = 20 \\ 2x_1+2x_2+3x_3 = 45 \\ x_1, x_2, x_3\ X_4^e \text{ ،} X_5^e \geq 0 \end{cases}$$

$x_1=0, \quad x_2=0, \quad x_3=0, \quad X_4^e= 20 \quad X_5^e=45$

جدول الحل الأساسي الأول

Ci			4	3	5	0	0	$\frac{b_i}{X_i}$
Cj	Vj	bi	X_1	X_2	X_3	X_4^e	X_5^e	
0	X_4^e	20	1	2	1	1	0	20
0	X_5^e	45	2	2	3	0	1	15
Z_i=0			0	0	0	0	0	
$Z = Ci - Zi$			4	3	5	0	0	

- المتغيرة التي تدخل للأساس هي x_3
- المتغيرة التي تخرج من الأساس هي X_5^e

جدول الحل الأساسي الثاني

Ci			4	3	5	0	0	$\frac{b_i}{X_i}$
Cj	Vj	bi	X_1	X_2	X_3	X_4^e	X_5^e	
0	X_4^e	5	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	1	$\frac{-1}{3}$	15
5	X_3	15	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	22.5
Z_i=75			$\frac{10}{3}$	$\frac{10}{3}$	5	0	$\frac{5}{3}$	
$Z = Ci - Zi$			$\frac{2}{3}$	$\frac{-1}{3}$	0	0	$\frac{-5}{3}$	

- المتغيرة التي تدخل للأساس هي x_1
- المتغيرة التي تخرج من الأساس هي X_4^e

جدول الحل الأساسي الثالث (جدول الحل الأمثل)

Ci			4	3	5	0	0
Cj	Vj	bi	X_1	X_2	X_3	X_4^e	X_5^e
4	X_1	15	1	4	0	3	−1
5	X_3	5	0	−2	1	−2	1
Z_i = 85			4	6	0	0	0
$Z = Ci - Zi$			0	−3	0	−2	−1

الحل الأمثل يتضمن إنتاج منتوجين فقط وهما المنتوج الأول **(قارورات زيت ذات حجم متوسط بسعة 2.5 لتر)** والثالث**(قارورات زيت ذات حجم كبير بسعة 5 لتر)** بتعظيم ربح مقداره 85.

ثانيا :حالات تحليل الحساسية

1 التغيرات في معاملات دالة الهدف

التغيرات في معاملات دالة الهدف ممكن أن تحدث بسبب التغير في الأرباح أو الكلف للفعاليات الأساسية أو غير الأساسية.

1-1 تغيير معامل دالة الهدف للمتغير غير الأساسي

من جدول الحل الأساسي الثالث يتضح بان الحل الأمثل يتضمن إنتاج منتوجين فقط وهما الأول والثالث أي أنّ المنتوج الثاني سوف لا ينتج والسبب يعود إلى أنّ المنتوج الثاني يمثل أقل المنتوجات ربحا C_2، إن تناقص قيمة C_2 سوف لا يؤثر على الحل الأمثل الحالي ولإنتاج المنتوج الثاني فإن ذلك يتطلب زيادة C_2 التي سوف تغير قيمة معامل الربح النسبي $\overline{C_2}$ للمتغير غير الأساسي X_2الذي يبقى غير أساسي طالما قيمة C_2 أصغر أو تساوي صفر، من المرحلة الأخيرة من الجدول (جدول الحل الأمثل) نحصل على:

$$\overline{C_2} = C_2 - (4 \quad 5) \qquad \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = C_2 - 6$$

المرحلة الأخيرة من الجدول (جدول الحل الأمثل) تبقى تمثل الحل الأمثل طالما:

$$\overline{C_2} = C_2 - 6 \leq 0 \quad or \quad C_2 \leq 6$$

وهذا يفسر بأن ربح المنتوج الثاني (الوحدة الواحدة) طالما بقى أقل أو يساوي (6) فإن إنتاجه سوف يكون غير اقتصادي، وبافتراض إن ربح الوحدة الواحدة من المنتج الثاني زاد ليصبح (7) أي إن $\overline{C_2} =$ 1 ففي هذه الحالة فإن جدول الحل الأساسي الثالث سوف لن يمثل الحل الأمثل حيث أن X_2 المنتوج الثاني (قارورات الزيت ذات الحجم الصغير بسعة 1 لتر سوف يدخل لزيادة قيمة Z وبوساطة استخدام قاعدة أقل النسب فإن لا سوف يغادر والحل الأمثل الجديد موضح بالجدول الموالي:

جدول الحل الامثل الجديد

Ci			4	7	5	0	0	$\frac{b_i}{X_i}$
Cj	Vj	bi	X_1	X_2	X_3	X_4^e	X_5^e	
4	X_1	15	1	4	0	3	−1	$\frac{15}{4}$
5	X_3	5	0	−2	1	−2	1	$\frac{-5}{2}$
Z_i = 85			4	6	0	0	0	
$Z = Ci - Zi$			0	1	0	−2	−1	

- المتغيرة التي تدخل للأساس هي x_2
- المتغيرة التي تخرج من الأساس هي x_1

Ci			4	7	5	0	0
Cj	Vj	bi	X_1	X_2	X_3	X_4^e	X_5^e
7	X_2	$\frac{15}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1-}{4}$
5	X_3	$\frac{25}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1-}{2}$	$\frac{1}{2}$
Z_i = 85			$\frac{17}{4}$	3	5	$\frac{11}{4}$	$\frac{3}{4}$
$Z = Ci - Zi$			$\frac{-1}{4}$	0	0	$\frac{11-}{4}$	$\frac{3-}{4}$

1−2: تغير معامل دالة الهدف للمتغير الأساسي

التغير في ربح الوحدة الواحدة للمتغير الأساسي سواء أكان التغير زيادة أو نقصان يؤثر على الحل الأمثل وقد يؤدي هذا التغير إلى استبعاد المتغير الأساسي من الحل الأمثل أي يتحول إلى متغير غير أساسي وعلى هذا الأساس فإن هنالك حد أعلى وأدني لقيم C_1، وC_3 والتي تبقي الحل الأمثل في جدول الحل الأمثل السابق ذكره بدون تأثير ولتحديد الحدود العليا والدنيا لـ C_1، وC_3 فإن أي تغيير في C_1أو C_3

سوف يؤدي إلى تغير قيم عمود CB وهذا يؤدي إلى تغيير قيم معاملات الربح النسبية ولكن الحل الأمثل يبقى أمثل عندما لا تتأثر قيم الأرباح النسبية للمتغيرات الأساسية $\overline{C_3}, \ \overline{C_1}$ أي تبقي صفرية وكذلك قيم الأرباح النسبية للمتغيرات غير الأساسية .

$\overline{C_5}, \ \overline{C_4}, \ \overline{C_2}$ تبقى غير موجبة ولضمان ذلك نستخدم العلاقات الآتية لمعرفة الحدود الدنيا والعليا للمتغيرات الأساسية:

$$1.\ \overline{C_2} = 3 - (\,C_1 \quad 5)\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = 13 - 4C_1;\ \ \overline{C_2} = 3 - (\,4 \quad C_3)\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = 2C_3 - 13$$

$$2.\ \overline{C_4} = 0 - (\,C_1 \quad 5)\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = 10 - 3C_1;\ \ \overline{C_4} = 0 - (\,4 \quad C_3)\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = 2C_3 - 12$$

$$3.\ \overline{C_5} = 0 - (\,C_1 \quad 5)\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = C_1 - 5;\ \ \overline{C_5} = 0 - (\,4 \quad C_3)\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 4 - C_3$$

حدود التغير في ربح الوحدة الواحدة من المنتج الأول بدون التأثير على الحل مثل هي:

يبقى $\overline{C_2} \le 0$ طالما $C_1 \ge {}^{13}/_{4}$

يبقى $\overline{C_4} \le 0$ طالما $C_1 \ge {}^{10}/_{3}$

يبقى $\overline{C_5} \le 0$ طالما $C_1 \le 5$

ولذلك فإن الحد الأدنى والأعلى لـ C_1 هو: $13/4 \le C_1 \le 5$

وهذا يعني إن أي قيمة يأخذها C_1 ضمن هذا المدى سوف لا تؤثر على الحل الأمثل المعرف بالجدول الحل الاساسي الثالث (الحل الأمثل) فمثلا إذا كان $C_1 = 5$ فإن الحل الأمثل هو:

$$X_1 = 15, \qquad X_2 = 0\,,\ \ X_3 = 5$$

ولكن قيمة دالة الهدف سوف تتغير من 85 إلى 100 وإن أي قيمة يأخذها C_1 خارج الحد الأدنى والأعلى سوف تؤثر على الحل الأمثل ويصبح غير أمثل وبالتالي تطبيق طريقة السمبلكس وكما موضح سابقا .

حدود التغير في ربح الوحدة الواحدة من المنتج الثالث بدون التأثير على الحل مثل هي:

يبقى $\overline{C_2} \le 0$ طالما $C_3 \le {}^{13}/_{2}$

يبقى $\overline{C_4} \le 0$ طالما $C_3 \le 6$

يبقى $\overline{C_5} \le 0$ طالما $C_3 \ge 4$

ولذلك فإن الحد الأدنى والأعلى ل C_3 هو: $4 \le C_3 \le 6$

3-1: تغير المعامل لكلا المتغيرات الأساسية وغير الأساسية

في هذه الحالة التغير سيكون المعاملات المتغيرات الأساسية وغير الأساسية والتي هي معاملات دالة الهدف وقد يكون التغير المتغيرين أساسي وغير أساسي أو أكثر وبوساطة اختبار صف $\overline{C}$يتم معرفة تأثير هذا التغير على الحل الأمثل فبافتراض إن دالة الهدف هي $Z = 2x_1 + x_2 + 3x_3$فإن هذا التغيير في معاملات دالة الهدف قد لا تؤثر على الحل الأمثل في حال كون قيم صف $\overline{C}$ تبقى غير موجبة أما في حالة ظهور قيم موجبة في صف $\overline{C}$ فإن الجدول (الثالث) سوف لا يمثل الحل الأمثل

$$\overline{C_1} = \overline{C_3} = 0$$

$$\overline{C_2} = 1 - (\,2 \quad 3)\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = -1$$

$$\overline{C_4} = 0 - (\,2 \quad 3)\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\overline{C_5} = 0 - (\,2 \quad 3)\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -1$$

يتضح من ذلك إن الجدول (الثالث) يبقى يمثل الحل الأمثل مع تغيير قيمة دالة الهدف مع وجود حل أمثل بديل $\overline{C_4} = 0$

2- تغيير معاملات الجانب الأيمن

قبل البدء بتحليل هذا الموضوع لابد لنا إن نتعرف أولا على بعض المصطلحات ذات الصلة الأساسية بهذا الموضوع:

مصفوفة الأساس basic matrix وهي المصفوفة التي تمثل أعمدتها الأعمدة المناظرة المتغيرات الحل الأمثل الأساسية في الجدول السمبلكس الأولي أي إنها تمثل الأعمدة المناظرة ل X_1, X_3 بحيث

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

معكوس مصفوفة الأساس؛ ممكن حساب معكوس مصفوفة B بالطرائق التقليدية ولكن في طريقة السمبلكس فإن معكوس مصفوفة الأساس عبارة عن مصفوفة تمثل أعمدتها الأعمدة المناظرة للمتغيرات الأساسية الأولية في أي جدول سمبلكس أي إنها تعطي معكوس مصفوفة B لذلك الجدول ولذلك فإن معكوس مصفوفةB عبارة عن الأعمدة المناظرة للمتغيراتX_5, X_4، في المرحلة الأخيرة من الجدول (الثالث) بحيث:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

التغيرات في الموارد سواء أكانت زيادة أم نقصان تعتبر من الأمور الهامة جدا التي يلجا إليها عامل القرار في عمل التفسيرات الاقتصادية للمسألة موضوع الدراسة، بافتراض إضافة وحدة واحدة (ساعة) إلى الجانب الأيمن b_i للقيد الذي يمثل ساعات العمل أي إن متجه الموارد سوف يتحول من$b = \begin{bmatrix} 20 \\ 45 \end{bmatrix}$ إلى من$b = \begin{bmatrix} 21 \\ 45 \end{bmatrix}$

يلاحظ أن الحل المتمثل بالجدول (الثالث) يبقى حل أمثل باستثناء التغير الذي سيحدث في قيمb بينما قيم صف $\overline{C}$سوف لا تتأثر أي تبقى غير موجبة ولذلك الدراسة تأثير التغير في متجه$\overline{b}$ يتطلب الأمر إن نثبت فقط بان متجه الموارد الجديدb يبقي موجب وهذا لا يتطلب حل مسألة البرمجة الخطية (LP.) ثانية حيث إن أي عمود في جدول السمبلكس النهائي والذي يمثل الحل الأمثل ممكن إن نحصل عليه بوساطة ضرب العمود المناظر له في جدول السمبلكس الأولي بمعكوس مصفوفة الأساس

التغير الحاصل في متجه الموارد من $b = \begin{bmatrix} 20 \\ 45 \end{bmatrix}$ إلى من $b = \begin{bmatrix} 21 \\ 45 \end{bmatrix}$

يؤدي إلى تغير متجه الموارد للحل الأمثل من $b = \begin{bmatrix} 15 \\ 5 \end{bmatrix}$ إلى من $\overline{b} = \begin{bmatrix} 18 \\ 3 \end{bmatrix}$

وهذه النتيجة تم الحصول عليها بوساطة:

$$\overline{b} = B^{-1}\, b$$

$$B^{-1}\, b = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 21 \\ 45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ولذلك فإن الإنتاج الأمثل الجديد هو:

$$X_1 = 18,\ \ X_2 = 0,\ \ X_3 = 3,\ \ \ Z = 87$$

نلاحظ إن التغير في الحل الأمثل لم يحدث في المتغيرات الأساسية وغير الأساسية أي إن الإنتاج الأمثل بقي يمثل إنتاج منتوجين فقط وهما الأول والثالث ولكن حدث في كميات الإنتاج للمنتوجين وفي قيمة Z.

التفسير الاقتصادي هو إن زيادة ساعة عمل واحدة أدت إلى زيادة في أرباح الشركة بمعدل (2) وهي تمثل الفرق بين قيمة Z الجديدة والقديمة:

87−85 =2

زيادة ربح الشركة ألفي دينار لكل ساعة عمل إضافية يدعى سعر الظل لقيد ساعات العمل، لنفترض إن زيادة ساعات العمل . إضافية يكلف الشركة (3) ألاف دينار وترغب الشركة في معرفة ما إذا كان ساعة العمل اقتصادي أم لا أي سوف يعود بفائدة إلى الشركة أم لا لذلك فباستخدام سعر الظل لقيد ساعات العمل يمكننا معرفة هل إن إضافة ساعة عمل أضافية هل يعود بالربح إلى الشركة أم لا، وبما أن إضافة

ساعة العمل يعود بربح مقداره ألفين دينار فهذا يؤدي إلى إن الشركة سوف تخسر ما مقداره ألف دينار نتيجة لزيادة م العمل ساعة واحدة.

سعر الظل ممكن استخراجه مباشرة من جدول السمبلكس النهائي وكما تم التطرق إليه سابقا حيث أنه يمثل معامل المتغيرات الوهمية في صف C بغض النظر عن الإشارة ويمكن أيضا استخراجه بالصيغة الآتية:

$$(y_1 y_2) = C_B B^{-1} = (4 \quad 5)\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = (2 \quad 1)$$

ولمعرفة مدى إمكانية التغير في ساعات العمل المتوفرة سواء أكان التغير زيادة أم نقصان بحيث إن هذا التغير لا يؤثر على الحل الأمثل الحالي، نفترض إن b_iيمثل ساعات العمل الممكن توافرها لذلك لكي يبقى الجدول (الثالث) يمثل الحل الأمثل فإن:

$B^{-1}\begin{bmatrix} \mathrm{b_i} \\ 45 \end{bmatrix}$ يجب أن تكون اكبر أو تساوي صفر أي:

$$B^{-1}\begin{bmatrix} \mathrm{b_i} \\ 45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{b_i} \\ 45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3b_i & -45 \\ 45 & -2b_i \end{bmatrix}$$

وهذا يعني إن الحل يبقى أمثل طالما:

$$3b_i - 45 \geq 0 \rightarrow b_i \geq 15$$

$$45 - 2b_i \geq 0 \rightarrow b_i \leq 45/2$$

أي إن الإنتاج سوف يشمل المنتجين الأول والثالث فقط طالما ساعات العمل تبقى ضمن المدى

$15 \leq b_i \leq 45/2$ والحل الأمثل هو:

$$X_1 = 3\mathrm{b_i} - 45, \qquad \mathrm{X_2} = 0,$$
$$\mathrm{X_3} = 45 - 2\mathrm{b_i}; \qquad \mathrm{Z} = 4(3\mathrm{b_i} - 45) + 5(45 - 2\mathrm{b_i})$$

3- التغيرات في مصفوفة القيود

هنالك عدة حالات للتغيرات التي تحدث في مصفوفة القيود وهذه الحالات هي:

3-1 إضافة فعاليه جديدة

نفترض أن الشركة ترغب بإنتاج منتوج جديد يتطلب ساعة عمل واحدة و2 وحدة من المواد الأولية وربح الوحدة الواحدة من المنتوج هو 3 الف دينار وترغب الشركة في معرفة ما مدى صلاحية انتاج هذا المنتوج اقتصاديا وعلى هذا الأساس سوف يتم إضافة متغير جديد إلى الأنموذج X_6 بمعامل ربح مقداره 3 مع إضافة عمود إلى جدول السبلكس الأولي هو$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$

أن الجدول السابق يبقى أمثل في حال كون $\overline{C}_6$غير موجب ولذلك يتم احتساب C_6وكالآتي:

$$\overline{C}_6 = C_6 - C_B\left[B^{-1}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right] = 3 - \begin{bmatrix}5 & 4\end{bmatrix} \qquad \left[\begin{bmatrix}3 & -1\\-2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right] = 3 - \begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

بما أن $\overline{C}_6 = -1$فإن الجدول (الثالث) يمثل الحل الأمثل أي أن إنتاج المنتوج الجديد هو غير اقتصادي، أما في حالة كون $\overline{C}_6$موجب فإن ذلك يعني أن الجدول (الثالث) هو غير أمثل ويتطلب الأمر تكملة طريقة السمبلكس.

3-2 التغير في متطلبات الموارد للفعاليات الموجودة

تغيير متطلبات أحد المنتوجات من ساعات العمل والمواد الأولية قد يؤثر على الحل الأمثل، بافتراض أن متطلبات الوحدة الواحدة من المنتج الثاني تتغير من ساعتين عمل إلى ساعة واحدة ومن (2) إلى (3) من المواد الأولية، أن الحل الأمثل الموضح بالجدول (الثالث) يبقى أمثل في حال كون $\overline{C}_2$ الجديد غير موجب لذلك يتم احتساب C_2وكالآتي:

$$\overline{C}_2 = C_2 - C_B\left[B^{-1}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\right] = 3 - \begin{bmatrix}5 & 4\end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix}3 & -1\\-2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\right]$$

$$= 3 - \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 - 5 = -2$$

بما أن $\overline{C}_2 = -2$ فإن الجدول (الثالث) يبقى يمثل الحل الأمثل أما في حال كون موجب فإن ذلك يتطلب تكملة طريقة السمبلكس للوصول إلى الحل الأمثل جديد، أما إذا كان المتغير أساسي فإن الحل الأمثل يبقى أمثل في حال كون قيمة $\overline{C}$عديدة للمتغير الأساسي تساوي صفر

3-3 إضافة قيود جديدة

نفترض إضافة القيد الآتي إلى المسألة:

$$\boxed{3X_1 + X_2 + 2X_3 \leq 50}$$

معرفة مدى تأثير هذا القيد على الحل الأمثل يتم من خلال كون قيم المتغيرات الأساسية المثلى تحقق القيد أم لا أي:

$$\boxed{3(15) + 0 + 2(5) = 55 > 50}$$

فإن القيد لا يتحقق وهذا يعني أن الحل المبين في الجدول(الثالث) هو حل غير أمثل ، هذا الأساس يتم إضافة القيد الجديد إلى المرحلة الأخيرة من الجدول (الثالث) ومن ثم : طريقة السمبلكس للوصول إلى الحل الأمثل

الفصل السادس

(مشكلة النقل)

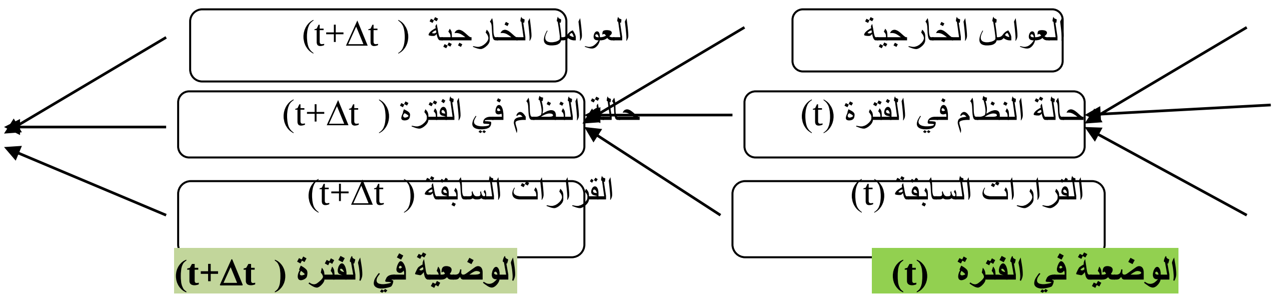
مشكلة النقل

تمهيد

تفترض المسائل السابقة و التي تمت دراستها بأن المؤسسة نظام ستاتيكي لا يتغير فهي تنطق من وضعية معينة لاتخاذ القرارات بناءا على تلك الوضعية سوف تستمر مستقبلا و لا يمكن أن تتغير لكن في الواقع المؤسسة تعد نظاما ديناميكيا و حركيا و لا تتعلق الحركة هنا بعامل الوقت فقط، ففي بعض المسائل فإنها تكون و همية في شكل مراحل

كل هذه المسائل أو غيرها و التي تتميز بالتطور و الحركة يتم حلها بكيفية تدعى البرمجة الحركية ، و تستخدم هذه الكيفية عادة لحل مسائل النقل أو في تسيير الاستثمارات أو في تسيير المخزونات خاصة لأنها تتميز بالحركة (دخول و خروج) .....الخ[1]

تنطلق البرمجة الحركية لحل مثل هذه المسائل من قاعدة (R.Belleman) مفادها " أن السياسة المثلى (P) هي التي مهما كان الوضع الأول و القرار الأول فالقرارات التالية يجب أن تشكل سياسة مثلى للوضعية الناتجة عن القرار الأول "، وذلك أن إنتقال النظام من وضعية في فترة (t) إلى وضعية أخرى في الفترة ($t+\Delta t$) يكون فيها النظام أحسن مما كان عليه و الذي يتأثر بعوامل ثلاث و هي: المتغيرات الخارجية –حالة النظام في الفترة (t) – القرارات السابقة ، هذه العوامل الثلاث يمكن التعبير عنها كما في الشكل التالي :



مهما كانت مسألة البرمجة الحركية يمكن الانطلاق و الشروع في حلها من المرحلة الأول المرحلة الأخيرة و تستعمل وسائل وطرق كثيرة منها :

- ✓ طريقة الشبكة أو طريقة الرسم البياني .
- ✓ طريقة الجداول

يمكن تعريف مشكلة النقل بأنه توزيع للبضائع من نقاط متعددة المصادر الى نقاط الطلب باقل تكلفة ممكنة و تعتبر طريقة النقل من الأساليب الرياضية الكمية المشتقة من البرمجة الخطية تدرس عملية اتخاذ القرارات المتعلقة بنقل حجم معين من السلع أو الموارد

[1] -حامد سعد نور الشمرتي، علي خليل الزبيدي، **مرجع سبق ذكره** ص 281.

من مصادر الانتاج المتعدد الى مراكز الاستهلاك المتعددة والهدف من حل مشاكل النقل هو سد احتياجات المراكز ذات العلاقة بأقل تكلفة ممكنة أي ايصالها الى المستهل بأقل تكلفة ممكنه.

أولا : حل مشكلة النقل باستخدام طريقة الرسم البياني (الشبكة)

1- حالة التقليل :

مثال :ترغب مؤسسة" الوفاء"النقل البضائع نقل إحدى السلع من مدينة عنابة(A) إلى مدينة قالمة (L) ولها امكانية المرور بالبلديات والمحافظات التالية :

B –C-D-E –F-G-H-I-J-K تكلفة النقل من بلدية إلى أخرى هي كالأتي:

DE=600,BE=200,AD=500,AC=300,AB=400,DF=200,EH=800,CG=500,

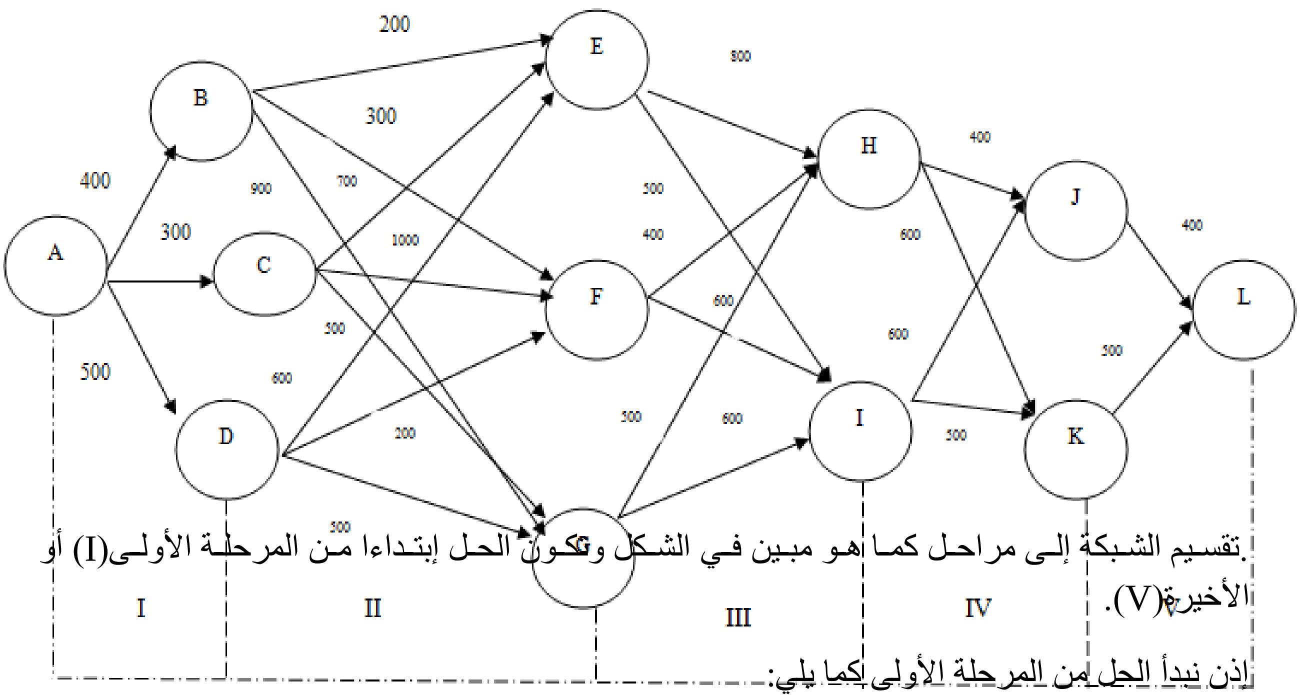
CF=1000,CE=900,BG=700,BF=300,HK=600,GI=600,GH=500,FI=600,

FH=400,EI=500,DG=500,KL=500,JL=400,IK=500,IJ=600,HJ=400

المطلوب: تحديد الطريق الذي يسمح بنقل هذه المادة بأقل تكلفة؟

الحل :

1.رسم الشبكة:



.تقسيم الشبكة إلى مراحل كما هو مبين في الشكل وتكون الحل إبتداءا من المرحلة الأولى(I) أو الأخيرة(V).

إذن نبدأ الحل من المرحلة الأولى كما يلي:

المرحلة الأولى:

ولدينا المسافات أو المسالك التالية:

$$\begin{cases} AB=400 \\ AC=300 \\ AD=500 \end{cases}$$

المرحلة الأولى + المرحلة الثانية

$$\left.\begin{matrix} ABE=400+200=600 \\ ABF=400+300=700 \\ ABG=400+700=1100 \end{matrix}\right\}$$

ABE=600

وتعتبر سياسة مثلى(P*) لأنه المسلك الوحيد مرورا بالمدينة(B) والذي يعطي أقل تكلفة.

ACE=300+900=1200

ACF=300+1000=1300

ACG=300+500=800

ACG=800

السياسة المثلى

مرور بالمدينة(C) فإن المسلك الأمثل حتى نهاية المرحلة الأولى والثانية هو المسلك ACG لآنه يعطي أقل تكلفة مقارنة المسلكين الأخرين

ADE=500+600=1100

ADF=500+200=700

ADG=500+500=1000

ADF=700

السياسة المثلى

مرور بالمدينة(D) يعتبر الطريق ADF المسلك الأمثل لآن يسمح بنقل المادة بأقل تكلفة.

- خلال المرحلة الأولى، والمرحلة الثانية فأن السياسات المثلى هي التي تعبر المسالك والطرق التالية:ADF,ACG,ABE

المرحلة (الأولى والثانية والثالثة)

ABEI=1100

سياسة مثلى

ADFH=1100

سياسة مثلى

ABEH=600+800=1400

ABEI=600+5000=1100

ACGH=800+500=1300

ACGI=800+600=1400

ADFH=700+400=1100

ADFI=700+600+1300

يبدو أنه تمر بالمدينة(H) فإن السياسة المثلى تتطلب المرور بالمسلك الأمثل ADFH لآنه يسمح بنقل المادة بأقل تكلفة 1100 دينار.

أما وللمرور بالمدينة(I) فإن المسلك الأمثل هو ABEI وعليه فإن خلال الرحلة الأولى والثانية والثالثة فإن السياسات المثلى هي التي تعبر عن الطرق والمسالك التالية: ADFH,ABEI

دراسة المراحل(الأولى الثانية، الثالثة والرابعة)

ABEIJ=1100+600=1700

ADFHJ=1100+400=1500

ABEIK=1100+500=1600

ADFHR=1100+600=1700

ADFHJ=1500

ABEIK=1600

إذا تطلب الأمر المرور بالمدينة(J) فإن المسلك الأمثل هو ADFHJ لآن به أقل تكلفة أما بالنسبة للمدينة(K) فإن ABEIK يعتبر مسلك أمثل

إذن من خلال المراحل(الأولى، الثانية، الثالثة والرابعة) فإن السياسات المثلى تعبر عن الطرق والمسالك التالية:ABEIK-ADFHJ

دراسة المراحل (الأولى+ الثانية+ الثالثة+ الرابعة+ الخامسة)

ADFHJL=1500+400=1900

ABEIKL=1600+500=2100

حتى المدينة(L) فإن المسلك الأمثل هوADFHJL والذي يعبر في الوقت ذاته عن السياسة المثلى للمؤسسة والتي تسمح بنقل هذه المادة من المدينة(A) نحو المدينة(L) مرورا بالمدن التالية: J,H,F,D وذلك بتكلفة دنيا قدرها 1900 دينار ويتضح هذا المسلك من خلال الرسم (أنظر الشبكة)

2- حالة التعظيم:

مثال2:

تريد مؤسسة الريان للنقل العمومي إنجاز شبكة للنقل الحضري تسمح بنقل أكبر عدد ممكن من المسافرين من المحطة الرئيسية (A) إلى المحطة النهائية(H) وتتويج أن يكون عدد المسافرين من محطة إلى أخرى كما يلي:

CF=30,CE=23,BF=25,BE=20,AD=14,AC=18,AB=15,GH=10,FG=10,EG=13

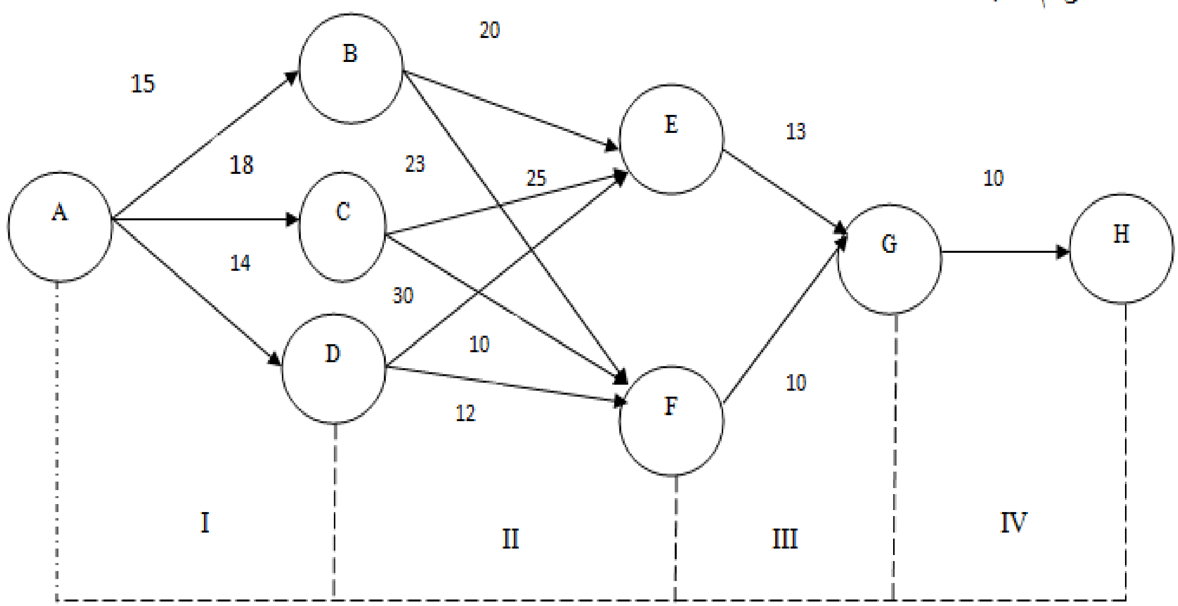
,DF=12, DE=10

المطلوب:

البحث عن الطريق الذي يسمح بالحصول على أكبر الإيرادات إذا علمت أن ثمن التذكرة الواحدة 5 دج؟

الحل:

1.رسم الشبكة:



بعد تقسيم الشبكة إلى مراحل تنطلق في دراستها إبتداءا من المرحلة الأولى:

-من المحطة(B) فإنه لدينا المسلك الوحيد(15=AB)

- أما بالنسبة للمحطة(C) فإنه يوجد لدينا مسلك وحيد (AC=18)

-وإلى المحطة(D) فإنه يظهر أيضا مسلك وحيد(D=14)

دراسة المرحلتين الأولى والثانية:

من الوصول إلى المحطة(E) فإنه تظهر أمامنا المسالك التالية :

ABE=15+20=35

ACE=18+23=41

ADE=14+10=24

وهي:

ويعتبر المسلك ACE المسلك الأمثل والذي يسمح بنقل أكبر عدد ممكن

ABF=15+25=40

ACF=18+30=48

ADF=14+12=26

هــي التـــي تعبــر عــن المســالك والطــرق التاليه:ACF,ACE

المسلك الأمثل في هذه الحالة هو ACF لأنه يسمح بنقل أكبر عدد وهو(48)

يمكم الوصول إلى المحطة(G) مرورا بإحدى الطريقتين التاليين:

ACEG=41+13=54

ACFG=48+10=58

إن المسلك الأمثل والذي يسمح بنقل أكبر عدد هو (ACFG) ويعتبر سياسة مثلى

-يبدو أنه يوجد طريق واحد أمثل بإمكانه نقل أكبر عدد من المسافرين وهو المسلك(ACFGH) والذي يعطي أكبر إيرادات والتي تعادل R=(58X10)X5=340DA والذي يمثل سياسة مثلى للمؤسسة(P*) Politique Optimale ويتضح هذا الطريق من خلال الرسم البياني الشبكة.

الفصل السابع

(البرمجة الغير خطية)

تمهيد:

تتميز مسائل البرمجة الغير خطية بوجود مجموعة من المصطلحات التي تستدعي ضمنياً استخدام توابع لا خطية مثل :(ex, sinx, cosx, ln x...) وقد تظهر اللاخطية أيضاً نتيجة التأثير المتبادل بين متحولين أو اكثر مثل x_1, x_2 أو x_1 و $\ln x_2$ أو $x_1^{x_2}$ ....الخ.

إن دراسة تقنيات حلول مسائل البرمجة الغير خطية أدت إلى إيجاد بنية أساسية تستخدم لإيجاد هذه الحلول، فمن خلال ما تطرقنا له في الفصول السابقة اتضح بأنّ طريقة السمبلكس تمكن من الوصول الى الحل الأمثل حيث بنيت هذه الطريقة على حل المعادلات الخطية التي تناظر القيود الهيكلية حيث يكمن الحل في أحد النقط الطرفية لفئة الحلول الممكنة حيث تمثل منطقة الحلول الممكنة فئة محدبة ، لكن عادة تكون المشاكل الحقيقية غير خطية وفي هذه الحالة تكون المشكلة غير خطية [1]

1-مشاكل البرمجة غير الخطية

Non-Linear Programming Problems

عادة تكون مشكلة البرمجة على النحو التالي:

أوجد قيم Xj ، بحيثj= 1,2,..,n التي تجعل:

$$\boldsymbol{Max(or\ Min.)\ Z = (X_1, X_2,, \dots, X_n)} \ \dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

$$g_i(X), \qquad f(X_1, X_2,, \dots, X_n) \begin{matrix} \le \\ = \\ \ge \end{matrix} b_i, \quad i = 1,2, \dots, m \quad \dots \dots \dots \dots (2)$$

فإذا كان يوجد دالة واحدة على الأقل من الدوال $_i(X),\ f(X_1, X_2,, \dots, X_n)$ **دالة غير خطية، تكون المشكلة (1)-(2) مشكلة برمجة غير خطية.**

وعندما تكون القيود في (2) في شكل متساويات على النحو:

$$g_i(X_1, X_2,, \dots, X_n) = b_i, \quad i = 1,2, \dots m \ \ (3)$$

تسمى المشكلة في هذه الحالة بمشكلة الأمثلية التقليدية وتسمى طرق حل هذه المشاكل التقليدية بطرق حل مشاكل الأمثلية التقليدية. وتعتبر طرق الحل التقليدية ذات أهمية في حل المشاكل التقليدية كذلك هي الأساس في فهم طرق وحل المشاكل الأخرى غير التقليدية عندما تأخذ مشكلة البرمجة غير الخطية شكلها العام في (1)-(2). وعند البحث عن حل لمشكلة البرمجة غير الخطية نحتاج إلى:

- ✓ .فحص جميع النقط التي عندها المشتقات الجزئية الأولى المتصلة تساوى صفر.
- ✓ فحص جميع النقط داخل منطقة الحلول الممكنة التي يوجد عندها عدم اتصال للمشتقات الجزئية الأولى. ويمكن تقسيم مشاكل البرمجة غير الخطية إلى:

ـ **المشاكل غير المقيدة:** وهنا تكون المشكلة على النحو:

أوجد Xj ، بحيث j=1,2,….n التي تجعل

1--عفاف علي حسن الدش ، (2012) : بحوث العمليات و اتخاذ القرارات – الأساليب التطبيق استخدام الحزم الرياضية ،كلية التجارة و ادارة الاعمال حلوان ، مكتبة عين شم الطبعة الثانية، القاهرة ، 401.

$$(\boldsymbol{Max})(\boldsymbol{or})\ (\boldsymbol{Min.})\ \boldsymbol{Z} = (\boldsymbol{X_1}, \boldsymbol{X_2},, \dots., \boldsymbol{X_n})$$

ولا توجد أي قيود على دالة الهدف.

وعندما تكون الدالة $f\,(X_1, X_2,, \dots., X_n)$

وعندما تكون الدالة $f(X_1\ ,\ X_2\ ,\ \dots\ ,\ X_n)$ دالة مقعرة فإنه يمكن الحصول على النهاية العظمى (الصغرى) المطلقة (Global Minimum) وتكون هذه النهاية هي الحل الأمثل للمشكلة. وفي هذه الحالة أيضا يمكن استخدام الطرق التقليدية للحل .

أما إذا كانت الدالة$f\,(X_1, X_2,, \dots., X_n)$ غير ذلك أي ليست مقعرة (محدبة) فإنه يمكن الحصول على النهاية العظمى (الصغرى) النسبية للدالة $f\,(X_1, X_2,, \dots., X_n)$ ، وتوجد أساليب حديثة نسبيا مثل البرمجة الهندسية (Geometric Programming) تتناول هذا النوع من المشاكل.

المشاكل المقيدة:

وهنا تكون المشكلة على النحو الموضح في (1)(2) بحيث تكون $f\,(X_1, X_2,, \dots., X_n)$ أو $g_i(X_1, X_2,, \dots., X_n)$ i=1,2,….m أو كلاهما دالة غير خطية وفي هذه الحالة:

. إذا كانت الفئة التي تحقق القيود $g_i(X)$ فئة مغلقة وحدودية محدبة ودالة الهدف مقعرة (محدبة) فإنه يمكن الحصول على النهاية العظمى (الصغرى) للدالة $f\,(X_1, X_2,, \dots., X_n)$(وتعتبر مشكلة البرمجة الخطية حالة خاصة من هذا النوع من المشاكل المقيدة). وفي هذه الحالة أيضا يمكن الحصول على الحل الأمثل باستخدام الطرق التقليدية .

أما إذا كانت الفئة التي تحقق القيود $_i(X)$ فئة غير محدبة. وفي هذه الحالة سواء كانت $f\,(X_1, X_2,, \dots., X_n)$(مقعرة (محدبة) أو غير ذلك، فإنه يمكن الحصول على نهاية عظمى (صغرى) نسبية للدالة $f\,(X_1, X_2,, \dots., X_n)$ التي تحقق القيود وبالتالي الحصول على حل نسبي للمشكلة، وكما ذكرنا أعلاه فإنه توجد أساليب حديثة نسبية تتناول هذا النوع من المشاكل قد تمكننا من الحصول على حل أفضل من الحل النسبي للمشكلة .

ثانيا البرمجة الغير خطية بدون قيود :

إذا اعتبرنا مشكلة البرمجة غير الخطية على النحو التالي: أوجد Xj ، بحيث j = 1,2,..,n التي تجعل:

$$\boldsymbol{Max(or\ Min.)\ Z = f(X) = f(X_1, X_2,, \dots., X_n)}$$

حيث

$$\boldsymbol{X = (X_1, X_2,, \dots., X_n)^T}$$

وكما أشرنا سابقا، أن حل المشاكل غير الخطية يتطلب فحص النقط الطرفية التي عندها تكون المشتقات الجزئية الأولى تساوي صفر أي نقط الاستقرار (أي النقط التي عندها يكون معامل الانحدار يساوي صفر).

وفيما يلي سوف نقدم نظريتين عن طريقهما يمكن تحديد النقط الطرفية العظمى ، والصغرى للدالة $f\,(X_1, X_2,, \dots., X_n)$ إذا توافرت الشروط

نظرية(1): الشرط الضروري لتكون النقطة $_0$ نقطة طرفية للدالة f(x)هو:

$$\nabla f(X_0) = \frac{\partial f(X)}{\partial X_i}|X = X_0 \quad = 0 \quad i = 1,2,\ldots,n \quad (4)$$

الإثبات:

1- إذا فرضنا أن النقطة X_0 نقطة نهاية صغرى - وباستخدام مفكوك تيلور (أنظر ملحقD) للدالة f(x) عند النقطةX_0 **على النحو التالي:**

$$f(X_0 + h) = f(X_0) + \nabla f(X_0)h + 0(h^2)$$

$$f(X_0 + h) - f(X_0) \approx \nabla f(X_0)h \qquad (5)$$

2- فإذا اعتبرنا أن $\nabla f(X_0)$ تختلف عن الصفر أي أن:

$$\frac{\partial f(X)}{\partial X_j}|X = X_0 \quad < 0 \quad \text{أو} \quad \frac{\partial f(X)}{\partial X_j}|X = X_0 \quad > 0, \quad j = 1,2,\ldots.n \quad (6)$$

فإذا اعتبرنا أن $h_j > 0$، فبضرب طرفي العلاقة $\frac{\partial f(X)}{\partial X_j}|X = X_0 < 0$ في h_j نجد أن

$$h_j \frac{\partial f(X)}{\partial X_j}|X = X_0 \quad < 0 \quad , \quad j = 1,2,\ldots,n \quad (7)$$

3 -وبضع **i= 1,2,...,n، بحيث $i \neq j$ نجد أن الطرف الأيمن ل (5) قيمته أكبر من الطرف الأيسر، يعني:**

$$\boldsymbol{f(X_0 + h)} < f(\boldsymbol{X_0})$$

وهذا يخالف (يناقض) افتراض أن النقطة x نقطة نهاية صغرى

وبالتالي فإنه عندما تكونX_0 نقطة نهاية صغرى لابد أن يكون:

$$\frac{\partial f(X)}{\partial X_j}|X = X_0 \quad = 0$$

لجميع قيمj= 1, 2, ...,n

حيث$0(h)^2$ مقادير من الدرجة الثانية أو أكثر في h وتؤول إلى الصفر أسرع من المقادير اللي تحتوي على h.

4 - بالمثل إذا فرضنا أن xX_0 نقطة نهاية عظمى فإذا فرضنا أن $h_i < 0$ من العلاقة (6) نجد أن:

$$h_j \frac{\partial f(X)}{\partial X_j}|X = X_0 \quad > 0$$

ويوضع $h_i = 0$ ، i= 1,2,...,n بحيث $\boldsymbol{i \neq j}$ نجد أن:

$$\boldsymbol{f(X_0 + h)} > f(\boldsymbol{X_0})$$

وهذا يخالف افتراض أن النقطة $_0$ نقطة نهاية عظمى. وبالتالي فإنه عندما تكون X_0 نقطة نهاية عظمى لابد أن يكون:

$$\frac{\partial f(X)}{\partial X_j} |X = X_0 \;\; = 0 \quad j = 1,2, \dots, n$$

ملحوظة: ومما هو جدير بالذكر أن متجه المشتقات الجزئية للدالة f(X) عند نقطة ما ولتكون X بحيث:

$$\nabla f(X^*) = 0$$

والنقطة *x ليست نهاية عظمى أو صغرى فإن النقطة x تكون نقطة انقلاب أو نقطة ارتكاز وتسمى جميع النقط التي تحقق الشرط (4) بنقط استقرار وبالتالي تعتبر نقط النهايات العظمى والصغرى والانقلاب والأرتكاز نقط استقرار.

نظرية (2): إذا فرضنا أن X_0 نقطة استقرار وإذا رمزنا للمصفوفة الهيسينية H عند النقطة X_0 بالرمز $H|X = X_0$ فإن:

أ. أن تكون النقطة X_0 نقطة نهاية عظمى إذا كانت المصفوفة $H|X = X_0$ تامة السالبية

ب) تكون النقطة X_0 نقطة نهاية صغرى إذا كانت المصفوفة $H|X = X_0$ تامة الإيجاب.

ج) تكون النقطة $_0$ نقطة انقلاب أو ارتكاز **إذا لم يتحقق (أ) أو (ب).**

الإثبات: إذا اعتبرنا أن X_0 نقطة استقرار للدالة f(X) ، وإذا فرضنا أن $0 < \theta < 1$ ، باستخدام مفكوك تيلور نجد أن:

$$f(X_0 + h) = f(X_0) + \nabla f(X_0)h + \frac{1}{2}\grave{h}\; H\; h\; |X_{0+\theta h}$$

$$f(X_0 + h) - f(X_0) = \nabla f(X_0)h + \frac{1}{2}\grave{h}\; H\; h\; |X_{0+\theta h} \qquad (9)$$

وبما أن:

$$\nabla f(X_0)h = 0$$

حيث $h \neq 0$ عند نقطة الاستقرار X_0 بالتالي فإن:

$$f(X_0 + h) - f(X_0) = \frac{1}{2}\grave{h}\; H\; h\; |X_{0+\theta h} \qquad (10)$$

فإذا كانت النقطة X_0 نقطة نهاية صغرى فإن:

$$f(X_0 + h) > f(X_0)$$

وتتحقق العلاقة عندما:

$$\frac{1}{2}\grave{h}\; H\; h\; |X_0 \quad > 0 \qquad (11)$$

وتتحقق العلاقة (11)إذا وإذا فقط كانت المصفوفة $H \ \ |X_0$ تامة الإيجاب.

كذلك إذا كانت النقطة X_0 نقطة نهاية عظمى فإن:

$$f(X_0 + h) < f(X_0)$$

وتتحقق العلاقة عندما

$$\frac{1}{2}\grave{h}\, H\, h\, |X_0 \quad < 0 \qquad\qquad (12)$$

وتتحقق العلاقة (12) إذا وإذا فقط كانت المصفوفة $H \ \ |X_0$تامة السالبية.

مثال : أوجد نقط الاستقرار للدالة التالية ثم حدد نوع كل نقطة.

$$f(X_1, X_2) = -X_1^2 - X_2^2 + 4X_1 + 6X_2 + 10$$

الحل: - وفقا لنظرية (1) نوجد المشتقات الجزئية الأولى للدالة ونساويها بالصفر للحصول على نقط الاستقرار على النحو التالي:

$$\frac{\partial f(X_1, X_2)}{\partial X_1} = -2X_1 + 4 = 0$$

$$\frac{\partial f(X_1, X_2)}{\partial X_2} = -2X_2 + 6 = 0$$

وبحل المعادلتين السابقتين نجد أن للدالة $f(X_1, X_2)$ نقطة استقرار واحدة هي النقطة $(\boldsymbol{X_1 = 2, X_2 = 3, f = 13})$ ولتحديد نوع النقطة نتبع التالي:

- نوجد مصفوفة المشتقات الجزئية من الترتيب الثاني H عند نقطة الاستقرار**2**

$$H = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f(X_1, X_2)}{\partial X_1^2} & \dfrac{\partial^2 f(X_1, X_2)}{\partial X_1 X_2} \\ \dfrac{\partial^2 f(X_1, X_2)}{\partial X_2 X_1} & \dfrac{\partial^2 f(X_1, X_2)}{\partial X_2^2} \end{bmatrix}$$

- وبفحص المصفوفة H عند نقطة الاستقرار نجد أنها مصفوفة تامة السالبية - وبالتالي فإن نقطة الاستقرار نقطة نهاية عظمى.

مثال : حدد نقط الاستقرار للدالة التالية ثم حدد نوع كل نقطة.

$$f(X_1, X_2, X_3) = -X_1^3 - X_2^3 - X_3^3 + 3X_1 + 12X_2 - \frac{3}{2}X_3^2$$

الحل: - للحصول على نقط الاستقرار نوجد المشتقات الجزئية من الترتيب الأول ونساويها بالصفر.

$$\frac{\partial f(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_1} = -3X_1^2 + 3 = 0 \rightarrow X_1 = \pm 1$$

$$\frac{\partial f(X_1,X_2,X_3)}{\partial X_2} = -3X_2^2 + 12 = 0 \rightarrow X_2 = \pm 2$$

$$\frac{\partial f(X_1,X_2,X_3)}{\partial X_3} = -3X_3^2 + 3X_3 = 0 \rightarrow X_3 = 0, -1$$

وبحل المعادلات السابقة نجد أن نقط الاستقرار هي:

$$(X_1 = 1\ ,\ X_2 = 2,\quad X_3 = 0)\quad ,\qquad (X_1 = -1\ ,\ X_2 = 2,\quad X_3 = 0)$$

$$(X_1 = 1\ ,\ X_2 = -2,\quad X_3 = 0)\quad ,\qquad (X_1 = -1\ ,\ X_2 = -2,\quad X_3 = 0)$$

$$(X_1 = 1\ ,\ X_2 = 2,\quad X_3 = -1)\quad ,\qquad (X_1 = -1\ ,\ X_2 = 2,\quad X_3 = -1)$$

$$(X_1 = 1\ ,\ X_2 = -2,\quad X_3 = -1)\quad ,\qquad (X_1 = -1\ ,\ X_2 = -2,\quad X_3 = -1)$$

٢- نوجد المصفوفة H حيث:

والذي تحدده الشركة، كذلك تعتمد على سعر نفس الجهاز من إنتاج شركتين أخرتين في السوق (أي وجود سلع بديلة) الشركة الأولى تبيع الجهاز بسعر (X_2) بالألف جنيه والشركة الأخرى تبيع الجهاز بسعر (X_3) بالألف جنيه أيضا بحيث:

$$Y = 120 - 0.5X_1^2 - 0.4X_2^2 - 0.2X_3^2 + 10X_1 + 5X_2 + 4X_3$$

المطلوب: إيجاد سعر الجهاز من إنتاج الشركة ومن إنتاج الشركتين الآخرتين الذي يجعل الكمية المطلوبة أكبر ما يمكن ثم عقب على الناتج.

الحل: ١- تصبح المشكلة - أوجد X_1, X_2, X_3 التي تجعل:

$$Max.Y = 120 - 0.5X_1^2 - 0.4X_2^2 - 0.2X_3^2$$

- نوجد معادلات الاستقرار

$$\frac{\partial Y}{\partial X_1} = -1.0X_1 + 10 = 0$$

$$\frac{\partial Y}{\partial X_2} = -0.8X_2 + 5 = 0$$

$$\frac{\partial Y}{\partial X_3} = -0.4X_3 + 4 = 0$$

وبالتالي تصبح نقطة الاستقرار $(X_1 = 10, X_2 = 6.25, X_3 = 10)$

- نوجد المشتقات الجزئية من الترتيب الثاني للدالةY عند نقطة الاستقرار على النحو التالي:

$$\mathrm{H} = \begin{bmatrix} -6\mathrm{X}_1 & 0 & 0 \\ 0 & -6\mathrm{X}_2 & 0 \\ 0 & 0 & -6\mathrm{X}_3 - 3 \end{bmatrix}$$

٣- أ) إذا اعتبرنا أن: $X_0(X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 0)$ فإن:

$$H|_{X0} = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

وبفحص المصفوفة $H|_{X0}$نجد أن المصفوفة تامة السالبية بالتالي النقطة X_0 نقطة نهاية عظمى.

ب) إذا اعتبرنا نقطة الاستقرار $_1(X_1 = -1, X_2 = 2, X_3 = 0)$ فإن:

$$H|_{X1} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

وبفحص المصفوفة $H|_{X1}$نجد أن النقطة X_1 ليست نهاية عظمى أو صغري أي أنX_1 قد تكون نقطة انقلاب أو ارتكاز. وبالمثل يمكن فحص باقي نقط الاستقرار. وفي بعض الحالات عندما تكون مجموعة المعادلات:

$$\nabla f(X) = 0$$

معادلات غير خطية قد يكون من الصعب حلها جبرية – لذلك نلجأ في هذه الحالات إلى الطرق التقريبية العددية لتحديد نقط الاستقرار وتعتبر (**طريقة نيوتن رافسون**) أحد وأهم هذه الطرق.

مثال(2): قامت أحدى شركات إنتاج أجهزة الكمبيوتر من نوع معين بتقدير عدد الأجهزة المطلوبة خلال عام في السوق من النوع الذي تقوم بإنتاجه الشركة فوجدت أن الكمية المطلوبة (Y) بالألف وحدة تعتمد على سعر الجهاز (X_1) بالألف جنيه.

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial X_1^2} = -1.0, \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial X_1 \ X_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial X_2^2} = -0.8$$

وبالتالي تصبح المصفوفة H على النحو:

$$\text{H} = \begin{bmatrix} -1.0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.8 & 0 \\ 0 & 0 & -0.4 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن:

$$|h_1| = |-1.0| = -1.0 < 0$$

$$|h_2| = \begin{vmatrix} -1.0 & 0 \\ 0 & -0.8 \end{vmatrix} = 0.8 > 0$$

$$|h_3| = \begin{vmatrix} -1.0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.8 & 0 \\ 0 & 0 & -0.4 \end{vmatrix} = 0.32 > 0$$

وبالتالي فإن النقطة (X_1, X_2, X_3) حيث:

$$Y^{*} = 205.620 \text{وحدة}$$

$$X_1^{*} = 10{,}000 \text{ جنيه}, \quad X_2^{*} = 6.250 \text{ جنيه}, \quad X_3^{*} = 10{,}000 \text{ جنيه}$$

تصبح نهاية عظمى وبالتالي فإن أكبر حجم للطلب Y، عندما يكون سعر بيع الوحدة (جهاز الكمبيوتر) من إنتاج الشركة يساوي10,000 دينار، وسعر بيع الوحدة في الشركة الأولي المنافسة 6250 دينار، وسعر بيع الوحدة بالشركة الثانية المنافسة 10,000 دينار ويكون أكبر حجم الطلب على إنتاج الشركة يساوي205,620

طريقة نيوتن رافسون

وتعتمد هذه الطريقة على تقريب المعادلات غير الخطية إلى معادلات خطية عند نقطة محددة ولتكن X^{k}باستخدام مفكوك تيلور - والانتقال من هذه النقطة إلى نقطة أخرى - كما يتضح فيما يلي:

إذا فرضنا أن مجموعة المعادلات في وضع الاستقرار على النحو التالي:

$$f_i(X) = 0 \quad , \qquad i = 1,2, \ldots, m \qquad (13)$$

معادلات مستقلة وغير خطية، X متجه في n من المتغيرات.

نفرض X^{k} نقطة معينة، وباستخدام مفكوك تيلور لتقريب الدوال $f_i(X)$ تقريب خطي عند النقطة X^{k} يصبح على النحو التالي:

$$f_i(X) \approx f_i\left(X^{\mathrm{k}}\right) + \nabla f_i(X^{k})(X - X^{K}), i = 1,2, \ldots, m \qquad (14)$$

فنجد أن (X) f_{i} تم تقريبها إلى دالة خطية في X عند النقطة X^{k} كما هو موضح في(14).

من (13) ، (14) نجد أن:

$$f_{\mathrm{i}}\left(\mathrm{X}^{\mathrm{k}}\right) + \nabla \mathrm{f}_{\mathrm{i}}\left(\mathrm{X}^{\mathrm{k}}\right)(\mathrm{X} - \mathrm{X}^{\mathrm{K}}) = 0 \quad , i = 1,2, \ldots, m \qquad (15)$$

فإذا فرضنا أن المتجه العموديA_K حيث

$$A_{\mathrm{K}} = \mathrm{f}_{\mathrm{i}}(\mathrm{X}^{\mathrm{K}})$$

كذلك إذا فرضنا المصفوفة $\mathbf{k}$ حيث:

$$\mathbf{B_k} = \mathbf{\nabla f_i(X^K)} = \left[\left. \frac{\mathbf{\partial f_i(X)}}{\mathbf{\partial X_j}} \right|_{\mathbf{X^K}} \right]_{\mathbf{mxn}} \qquad \mathbf{j = 1, 2, \ldots, n, i = 1, 2, \ldots, m}$$

بالتعويض في (15) نجد أن:

$$A_k + B_k(X - X^{K}) = 0 \qquad (16)$$

وتحت افتراض أن المعادلات $0 = (\ )_i$ معادلات مستقلة فإن المصفوفة$\mathbf{B_k}$ تكون مصفوفة غير شاذة، وبضرب طرفي المعادلات (16) في المصفوفة$\mathbf{B_K^{-1}}$ **نجد أن:**

$$\mathrm{B_K^{-1}}\, A_k + (\mathrm{B_K^{-1}}\, \mathrm{B_k})(X - X^{K}) = 0 \rightarrow$$

$$\mathrm{B}_{\mathrm{K}}^{-1}\,A_k + (X - X^K) = 0 \rightarrow$$

$$X = X^K - \mathrm{B}_{\mathrm{K}}^{-1}\,A_k \qquad (17)$$

ومن المعادلة (17) نجد أننا حصلنا على النقطة X عن طريق النقطة المحددة ^{K}

فإذا رمزنا للنقطة المحددة مبدئية بالرمز $X^{(0)}$- وبأستخدام المعادلة (17) نحصل على النقطة X ونرمز لها بالرمز $X^{(1)}$ أي بعد تطبيق (17) أول مرة. وبتكرار الإجراء عدد (k) من المرات نحصل على النقطة $^{(k+1)}$ حيث:

$$X^{(k+1)} = X^{(K)} - \mathrm{B}_{\mathrm{K}}^{-1}\,A_k$$

وينتهي الإجراء بعد m من التكرارات عندما:

$$\mathrm{X}^{(m)} \approx \mathrm{X}^{(\mathrm{m}-1)}$$

ومما سبق يمكن تلخيص خطوات الإجراء فيما يلي:

1- نفرض أن t= 0 .

2-تحديد النقطة$X^{(t)}$ (عند t = 0 يتم افتراض النقطة $X^{(0)}$)، والتعويض في$f_{\mathrm{i}}(\mathrm{X})$ يتم حساب $A_{(1)}$

3- إيجاد المصفوفة B_tحيث:

$$\mathbf{B_t} = \left[\frac{\partial \mathbf{f_i}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X_j}}\bigg|_{\mathbf{X^t}}\right]$$

4- ثم نوجد المصفوفة B_t^{-1}

5 نحسب النقطة $X^{(t+1)}$ حيث:

$$X^{(t+1)} = X^{(t)} - B_t^{-1} A_t$$

- نختبر النقطة $X^{(t+1)}$ إذا كان:

أ.$X^{(t)} \approx X^{(t+1)}$ ينتهي الإجراء وتكون نقطة الاستقرار هي $X^{(t+1)}$

ب. .$X^{(t)} \not\approx X^{(t+1)}$ نضع t=1+1 ، ونذهب للخطوة (2).

مثال : أوجد نقط الاستقرار للدالة$f(X_1, X_2)$

باستخدام طريقة نيوتن رافسون واعتبار النقطة المبدئية $X^{(0)}$ نقطة مبدئية حيث:

$X^{(0)} = (X_1 = 1, X_2 = 3)$ ثم قارن بين القيمة التقريبية $f(X_1, X_2)$ عند القيمة التقريبية لنقطة الاستقرار والقيمة الدقيقة.

الحل:

1- نوجد معادلات الاستقرار على النحو التالي:

$$f_1(X_1, X_2) = 3X_1^2 - 27 = 0 \quad (1)$$

$$f_2(X_1, X_2) = 3X_2^2 - 48 = 0 \quad (2)$$

التكرار الأول :

- نحسب $f_2(X_1, X_2)$ و $_1(X_1, X_2)$ عند $X^{(0)}$ حيث:

$$f_1\left(X^{(0)}\right) = 24 \qquad , \qquad f_2\left(X^{(0)}\right) = -21$$

وبالتالي فإن:

$$A_{(0)} = \begin{bmatrix} -24 \\ -21 \end{bmatrix}$$

- نوجد المصفوفة B حيث:

$$B = \begin{bmatrix} 6X_1 & 0 \\ 0 & 6X_2 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6X_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6X_2} \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$B_0^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{18} \end{bmatrix} \rightarrow$$

4- نحسب $x^{(1)}$ على النحو التالي:

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{18} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -24 \\ -21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4.1666 \end{bmatrix}$$

وبما أن

$$X^{(1)} \neq X^{(0)}$$

التكرار الثاني :

1- نحسب $f_2\left(X^{(1)}\right)$ و $f_1\left(X^{(1)}\right)$ على النحو:

$$f_1\left(X^{(1)}\right) = 48 \qquad , \qquad f_2\left(X^{(1)}\right) = 4.0667$$

وبالتالي فإن:

$$A_{(1)} = \begin{bmatrix} 48 \\ 4.0667 \end{bmatrix}$$

2- نوجد $B_{(1)}^{-1}$ حيث:

$$B_{(1)}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{30} & 0 \\ 0 & \frac{1}{24.999} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0333 & 0 \\ 0 & 0.04 \end{bmatrix}$$

3- نحسب $x^{(2)}$ على النحو التالي:

$$X^{(2)} = X^{(1)} - B_{(1)}^{-1} A_{(1)}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 \\ 4.1666 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.0333 & 0 \\ 0 & 0.04 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 48 \\ 4.0667 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3.4016 \\ 4.0039 \end{bmatrix}$$

وبما أن

$$X^{(2)} \neq X^{(1)}$$

التكرار الثالث :

1- نحسب $f_2\left(X^{(2)}\right)$ و $f_1\left(X^{(2)}\right)$ على النحو:

$$f_1\left(X^{(2)}\right) = 7.712648 \qquad , \qquad f_2\left(X^{(2)}\right) = 0.09365$$

وبالتالي فإن:

$$A_{(2)} = \begin{bmatrix} 7.71265 \\ 0.09365 \end{bmatrix}$$

2- نوجد $B_{(2)}^{-1}$ حيث:

$$B_{(2)}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.02161 & 0 \\ 0 & 1.77399 \end{bmatrix}$$

3- نحسب $x^{(3)}$ على النحو التالي:

$$X^{(3)} = X^{(2)} - B_{(2)}^{-1} A_{(2)}$$

$$= \begin{bmatrix} 3.4016 \\ 4.0039 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.02161 & 0 \\ 0 & 1.77399 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7.71265 \\ 0.09365 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3.2493 \\ 3.8378 \end{bmatrix}$$

وبما أن

$$X^{(3)} \neq X^{(2)}$$

التكرار الرابع :

1- نحسب $f_2\left(X^{(3)}\right)$ و $f_1\left(X^{(3)}\right)$ على النحو:

$$f_1\left(X^{(3)}\right) = 4.6739 \qquad , \qquad f_2\left(X^{(3)}\right) = -3.8139$$

وبالتالي فإن:

$$A_{(3)} = \begin{bmatrix} 4.6739 \\ -3.8139 \end{bmatrix}$$

2- نوجد $B_{(3)}^{-1}$ حيث:

$$B_{(3)}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0513 & 0 \\ 0 & 0.04349 \end{bmatrix}$$

3- نحسب $X^{(4)}$ على النحو التالي:

$$X^{(4)} = X^{(3)} - B_{(3)}^{-1} A_{(3)}$$

$$= \begin{bmatrix} 3.2493 \\ 3.8378 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.0513 & 0 \\ 0 & 0.04349 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4.6739 \\ -3.8139 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3.0095 \\ 4.0033 \end{bmatrix}$$

وبما أن

$$X^{(4)} \neq X^{(3)}$$

التكرار الخامس :

1- نحسب $f_2\left(X^{(4)}\right)$ و $f_1\left(X^{(4)}\right)$ على النحو:

$$f_1\left(X^{(4)}\right) = 0.1713 \qquad , \qquad f_2\left(X^{(4)}\right) = 0.0792$$

وبالتالي فإن:

$$A_{(4)} = \begin{bmatrix} 0.1713 \\ 0.0792 \end{bmatrix}$$

2- نوجد $B_{(4)}^{-1}$ على النحو:

$$B_{(4)}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.05538 & 0 \\ 0 & 0.04163 \end{bmatrix}$$

3- نحسب $X^{(5)}$ على النحو التالي:

$$X^{(5)} = X^{(4)} - B_{(4)}^{-1} A_{(4)}$$

$$= \begin{bmatrix} 3.0095 \\ 4.0033 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.05538 & 0 \\ 0 & 0.04163 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1713 \\ 0.0792 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3.00001 \\ 4.00000 \end{bmatrix}$$

من (3) ، (4) نجد أن:

$$X^{(5)} \approx X^{(4)}$$

بالتالي فإن:

$$X_1 = 3.00001 \ , \quad X_2 = 4.00000$$

تعتبر نقطة استقرار.

وبحل معادلات الاستقرار (2)،(1) تحليلية نجد أن أحدى نقط الاستقرار الدقيقة هي:

$$X_1 = 3.00 \ , \quad X_2 = 4.00$$

وبفحص النقطة ($\mathbf{X_1 = 3, X_2 = 4}$) نجد أنها نقطة نهاية صغرى، كذلك من (5) ، (6) نجد أن نقطة الحل الدقيقة في (6) المناظرة النقطة الحل التقريبي باستخدام نيوتن رافسون في (5)، متساويتين لأقرب 5 أرقام عشرية.

مثال: إذا فرضنا الدالة $F(X)$ حيث:

$$F(X) = X^3 - 6X^2 + 100$$

أ. أوجد باستخدام طريقة نيوتن رافسون نقطة استقرار للدالة $F(X)$ إذا كانت النقطة المبدئية $X^{(0)} = 3.5$.

ب. حدد نوع النقطة في (1).

الحل:

-1

$$f(X) = \frac{\partial F(X)}{\partial X} = 3X^2 - 12X = 0 \rightarrow$$
$$f(X) = X^2 - 4X = 0$$

-2 نضع t=0 فإن:

$$F\left(X^{(0)}\right) = (3.5)^2 - 4(3.5) = 12.25 - 14 = -1.75$$
$$\grave{F}\left(X^{(0)}\right) = 2X - 4 \rightarrow \grave{F}\left(X^{(0)}\right) = 2(3.5) - 4 = 3$$
$$X^{(1)} = (3.5)\frac{(-1.75)}{3} = 4.08$$

بما أن:

$$X^{(1)} \neq X^{(0)}$$

-3 نضع t=1

$$f\left(X^{(1)}\right) = (4.08)^2 - 4(4.08) = 0.33$$

$$f'\left(X^{(1)}\right) = 2(4.08) - 4 = 4.16$$

$$X^{(2)} = X^{(1)} - \frac{f(X^{(1)})}{f'(X^{(1)})}$$

$$= 4.08 - \frac{0.33}{4.16} = 4.0007$$

بما أن:

$$X^{(2)} \neq X^{(1)}$$

نوجد بنفس الأسلوب $^{(3)}$ حيث نجد أن:

$$X^{(3)} \neq X^{(2)}$$

x وبالتالي فإن:

$$X = X^{(3)} = 4.00$$

ب- لتحديد نوع النقطة $X = 4$ نوجد:

$$\frac{\partial^2 F(X)}{\partial X^2} = 6X - 12$$

وتصبح المصفوفة $H]_{X=4}$ على النحو:

$$H]_{X=4} = [12] \rightarrow |H| = 12 > 0$$

بالتالي فإن النقطة $X = 4$ نقطة نهاية صغرى.

ثالثا : البرمجة الغير خطية بقيود

وكما ذكرنا سابقا بالنسبة لحل مشاكل البرمجة غير الخطية نهدف إلى الحصول على نقط الاستقرار أولا ثم تحديد النقط العظمى (أو الصغرى) النسبية ثم إيجاد النقط العظمى (أو الصغرى) المطلقة في بعض الحالات الخاصة مثل حالة دالة الهدف المحدبة في حالة التصفير أو الدالة المقعرة في حالة التعظيم. وفي هذا الفصل حيث نتناول المشاكل المقيدة على النحو التالي:

$$\boldsymbol{Max(or\ Min.)\ Z = f(X)}$$

$$S.T. \qquad g_i(X) \begin{matrix} \leq \\ = \\ \geq \end{matrix} b_i \quad , \quad i = 1,2,\ldots.,m$$

حيث:

$$X = [X_1, X_2, \ldots.., X_n]^T$$

وهنا أيضا نبحث عن نقط الاستقرار للدالة f(X) التي تحقق القيود

$$g_i(X) \begin{matrix}\le\\=\\\ge\end{matrix} b_i$$ بحيث , $i = 1,2,\dots,m$,

وهنا سوف نميز بين حالتين:

الحالة الأولى: عندما تكون جميع القيود في شكل متساويات (=)

الحالة الثانية: عندما تكون القيود في شكل متباينات أو خليط من المتساويات والمتباينات.

الحالة الأولى: القيود في شكل متساويات

في هذه الحالة تكون المشكلة على النحو التالي:

$$\boldsymbol{Max(or\ Min.)\ Z = f(X)}$$

$$S.T. \qquad g_i(X) = b_i \quad , \quad i = 1,2,\dots,m$$

وتوجد طرق متعددة لحل المشكلة أعلاه ومنها طرق تقليدية مثل:

- ✓ طريقة المشتقات المقيدة
- ✓ طريقة معاملات لأجرانج

وهنا سوف نتناول بالتفصيل طريقة معاملات الأجرانج لحل مشكلة البرمجة غير الخطية كإحدى الطرق التقليدية للحل وذلك لأهميتها في دراسة وتفسير بعض المشاكل الاقتصادية .

طريقة معاملات الأجرانج: تفترض هذه الطريقة أن كل من الدوال F(X)، $g_i(X)$ دوال متصلة قابلة للتفاضل من الترتيب الثاني.

ويتطلب استخدام طريقة معاملات الأجرانج:

1. تكون دالة لأجرانج $F(X,\lambda)$ على النحو التالي:

$$F(X,\lambda) = f(X) + \lambda[b - g(X)] \qquad (20)$$

حيث λ متجه معاملات لأجرانج، g(X) متجه الطرف الأيسر للقيود، b متجه المقادير i = 1,2,...,n، وبذلك تم تحويل المشكلة المقيدة إلى مشكلة غير مقيدة.

2- إيجاد الشروط الضرورية لتكون النقطة X_0 نقطة استقرار على النحو التالي:

$$\left.\frac{\partial F(X,\lambda)}{\partial X_j}\right|_{X0} = \left.\frac{\partial F(X)}{\partial X_j}\right|_{X0} - \lambda \left.\frac{\partial g(X)}{\partial X_j}\right|_{X0} = 0, j = 1,2,\dots,n \quad (21)$$

$$\frac{\partial F(X,\lambda)}{\partial \lambda_j} = b_i - g_i(X) = 0, i = 1,2,\dots,m \quad (22)$$

٣. لتحديد نوع نقطة الاستقرار (أي الشروط الكافية) نوجد المصفوفة الهيسينية الحدودية وسوف نرمز لها بالرمز H^B حيث:

$$H^B = \begin{bmatrix} O & K \\ K^T & Q \end{bmatrix}_{(M+n)x(m+n)} \qquad (23)$$

حيث K مصفوفة من الترتيب (m X n) على النحو:

$$K = \left[\frac{\partial g_i(X)}{\partial X_I}\right]_{m\times n} \qquad (24)$$

والمصفوف Q من الترتيب (nxn) حيث:

$$Q = \left[\frac{\partial^2 F(X,\lambda)}{\partial X_i\, \partial X_j}\right]_{n\times n} \qquad (25)$$

كذلك O مصفوفة صفرية.

4. الشروط الكافية لتكون نقطة الاستقرار نهاية عظمى أو نهاية صغرى يتم تحديد إشارات المحددات القطرية الأساسية (n-m) الأخيرة للمصفوفة الهيسينية الحدوديةH^B في حالة $n > m$ على النحو التالي(:

أ. تكون نقطة الاستقرار نهاية عظمى إذا كانت المحددات على القطر الرئيسي للمصفوفة H^Bالأخير وعددها يساوي (n-m) بحيث تبدأ هذه المحددات بمحيدد بالترتيب (m2+1) ولها إشارة تبادلية تبدأ بالإشارة$(-1)^{m+1}$

ب. تكون نقطة الاستقرار نهاية صغرى إذا كانت المحددات على القطر الرئيسي للمصفوفة H^Bالأخير وعددها يساوي (n-m) بحيث تبدأ هذه المحددات بمحيدد بالترتيب (m2+1) ولكل فيها الإشارة$(-1)^m$

ج. فيما عدا ذلك تكون نقطة انقلاب أو نقطة ارتكاز

وسوف نوضح ذلك من خلال المثال التالي.

مثال :

$$Min.\, f(x) = X_1^2 + 2X_2^2 + 10X_3^2$$
$$S.T \quad X_1 + X_2^2 + X_3 = 5$$
$$X_1 + 5X_2 + X_3 = 7$$
$$X_1, X_2, X_3 \ \geq 0$$

الحل: 1- نكون دالة لأجرانج على النحو التالي:

$$F(X_1, X_2, X_3, \lambda_1, \lambda_2) = X_1^2 + 2X_2^2 + 10X_3^2$$
$$+\lambda_1[5 - X_1 - X_2^2 - X_3]$$
$$+\lambda_2[7 - X_1 - 5X_2 - X_3]$$

2- وللحصول على نقط استقرار نوجد المشتقات الجزئية الأولى للدالة L على النحو التالي:

$$\frac{\partial L}{\partial X_1} = 2X_1 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial X_2} = 4X_2 - 2\lambda_1 X_2 - 5\lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial X_3} = 20X_3 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 5 - X_1 - X_2^2 - X_3 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 7 - X_1 - 5X_2 - X_3 = 0$$

وبحل المعادلات (1) نحصل على نقط الاستقرار التالية:

$$X_1^* = 4.09\ ,X_2^* = 0.7071, \qquad X_3^* = 0.409,\ \ \lambda_1^* = 5.9355, \lambda_2^* = 2.2445$$

ملحوظة: بما أن: $X_1, X_2, X_3 \geq 0$ لذا تم رفض النقط التي عندها $X_2 < 0$

3-وبالتالي فإن المصفوفة $K_{2,3}$ على النحو التالي:

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 2X_2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1.4142 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1.4142 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

4- نوجد المصفوفة $Q_{3.3}$ حيث

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial X_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial X_1 \partial X_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial X_1 \partial X_3} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial X_2 \partial X_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial X_2^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial X_2 \partial X_3} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial X_3 \partial X_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial X_3 \partial X_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial X_3^2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}$$

وتصبح المصفوفة الحدودية $H^B_{5.5}$ على النحو التالي:

$$H^B = \begin{bmatrix} O & K \\ K & Q \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1.4142 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1.4142 & 5 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 20 \end{array}\right]$$

5- وبما أن $n - m = 3 - 2 = 1$ لذا فإننا سوف نختبر المحدد $\left|\mathrm{H}^{\mathrm{B}}\right|$ حيث

$$\left|H^{\mathrm{B}}\right| = +125.148 > 0$$

إذن النقطة $(X_1^* = 4.09\ , X_2^* = 0.7071,\ \ X_3^* = 0.409)$ نقطة نهاية صغرى.

حيث $(-1)^m = (-1)^2 = +1$

. مثال : اعتبر النموذج التالي:

$$Max.f(x) = 25 - X_1^2 - X_2^2 - X_3^2$$

$$S.T \quad 4X_1 + 2X_2^2 + X_3 = 8$$

الحل:

1- دالة لأجرانج:

$$F(X_1, X_2, X_3, \lambda) = 25 - X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 + \lambda[8 - 4X_1 - 2X_2 - X_3]$$

2- نوجد المشتقات الجزئية الأولى لتحديد نقط الاستقرار

$$\frac{\partial L}{\partial X_1} = -2X_1 - 4\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial X_2} = -2X_2 - 2\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial X_3} = -2X_3 - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 5 - X_1 - X_2^2 - X_3 = 0$$

وبحل مجموعة المعادلات (1) نجد أن نقطة الاستقرار هي:

$$X_1^* = \frac{32}{13}, X_2^* = \frac{16}{13}, \qquad X_3^* = \frac{8}{13}, \quad \lambda^* = \frac{-16}{13}$$

3- نوجد المصفوفة K حيث:

$$K = [4 \quad 2 \quad 1] \to K = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

كذلك المصفوفة Q حيث:

$$Q = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

٣- وبالتالي تصبح المصفوفة الحدودية $H^{B}_{4.4}$ على النحو التالي:

$$H^B = \begin{array}{c|ccc} 0 & 4 & 2 & 1 \\ \hline 4 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{array}$$

وبما أن $n - \mathrm{m} = 3 - 1 = 2$ ، بالتالي نوجد المحيددين الأخيرين عند نقطة الاستقرار فنجد أن:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 40 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -84 < 0$$

وبما أن $+ = (-1)^2 = (-1)^{m+1}$أي الإشارة تبادلية - , + إذن النقطة نقطة نهاية عظمى.

تفسير معاملات الأجرانج

إذا فرضنا أنX^* هي نقطة الحل الأمثل المطلق للدالة $Z = f(X)$ فإن:

$$\frac{\partial Z^*}{\partial \mathrm{b_i}} = \lambda_i^* \qquad (26)$$

والقيد (26) يعني أن معامل لأجرانج المناظر للقيد (1) قيمته في الحل الأمثل تعطى مدل تغير دالة الهدف Z^* بالنسبة لتغير المعلمة $\mathrm{b_i}$ عند الحل الأمثلX^* وسوف توضح ذلك من خلال الأمثلة التالية. وتعتبر معاملات لجرانج من المؤشرات الهامة المستخدمة في المشاكل الاقتصادية والاجتماعية.

الحالة الثانية: القيود في شكل متباينات أو خليط من المتباينات والمتساويات

وفي حالة إذا كانت القيود الهيكلية في شكل متباينات (≤أو≥) أو خليط من المتباينات والمتساويات، في هذه الحالة يتم تحويل المتباينات إلى متساويات بإضافة متغيرات مكملة غير سالبة ثم تطبيق طريقة لأجرانج في حالة القيود في شكل متساويات ويتم ذلك على النحو التالي:

1- إذا كانت المشكلة الأصلية:

$$Max.(or\ Min)Z = f(x)$$

$$S.T \quad g_i(X) \leq O \quad , \quad i = 1,2,\dots,r$$

$$g_i(X) \geq 0 \quad , \quad i = r+1, , \dots . , t$$

$$g_i(X) = 0 \quad , \quad i = t+1, , \dots . , m$$

2-إضافة S_i^2للقيود لتحويلها إلى متساويات على النحو

$$g_i(X) + S_i^2 = 0 \quad , \quad i = 1,2, \dots . , r$$

$$g_i(X) - S_i^2 = 0 \quad , \quad i = r+1, , \dots . , t$$

$$g_i(X) = 0 \quad , \quad i = t+1, , \dots . , m$$

3- وتصبح دالة لأجرانج L على النحو التالي:

$$L(X,S,\lambda) = f(X) - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i [g_i(X) + S_i^2] - \sum_{i=r+1}^{t} \lambda_i [g_i(X) - S_i^2] - \sum_{i=t+1}^{m} \lambda_i [g_i(X)]$$

4 - إتباع نفس الخطوات في الحالة الأولى للحصول على .Max أو .Min الدالة$L(X,S,\lambda)$

وهي نفس .Max أو .Min للدالة F(X)

وقد قدم كل من كونتوكر Kuhan-Tucker الشروط الضرورية للحصول على نقط استقرار المشاكل البرمجة غير الخطية في (27)-(28) بعد تحويل المتباينات إلى متساويات في (29) على النحو التالي:

أولا: الشروط الضرورية تحقيق العلاقات(30):

$$\frac{\partial\, L(X,S,\lambda)}{\partial \mathrm{X_j}} = 0 \qquad , \mathrm{j} = 1,2, \dots . . , \mathrm{n}$$

$$\frac{\partial\, L(X,S,\lambda)}{\partial \mathrm{S_i}} = 0 \qquad , \mathrm{i} = 1,2, \dots . . , \mathrm{m}$$

$$\frac{\partial\, L(X,S,\lambda)}{\partial \lambda_\mathrm{i}} = 0 \qquad , \mathrm{i} = 1,2, \dots . . , \mathrm{m}$$

كذلك أثبتنا أن الشروط الضرورية تكون أيضا شروط كافية Sufficient Conditions في الحالات الخاصة التالية:

1. إذا كان فراغ الحل (منطقة الحلول الممكنة للقيود في(28) فئة محدبة، ودالة الهدف f(X) دالة محدبة فإن النقطة (أو النقط) التي تحقق المعادلات (31) تكون نقطة نهاية صغرى مطلقة

2. إذا كان فراغ الحل (منطقة الحلول الممكنة للقيود في (28) فئة محدبة، ودالة الهدف F(x) دالة مقعرة فإن النقطة (أو النقط) التي تحقق المعادلات (31) تكون نقطة (أو نقط) نهاية عظمى مطلقة. ويمكن تلخيص هذه النتائج في الجدول التالي:

جدول (01)

نوع الحل	g(X)	F(X)	الحالة
نهاية عظمى مطلقة	فئة محدبة	مقعرة	Max
نهاية صغرى مطلقة	فئة محدبة	محدبة	Min

مثال:

$$Max\ Z = 2X_1^2 - 7X_2^2 + 12X_1X_2$$
$$S.T \quad 2X_1 + 5X_2 \leq 98$$

الحل:

1) من الدالة (1) يتضح أن الدالة Z دالة مقعرة

2) نحول القيد إلى متساوي فيصبح على النحو:

$$2X_1 + 5X_2 + S_1^2 = 98$$

نكون دالة لأجرانج:

$$(X, S, \lambda) = 2X_1^2 - 7X_2^2 + 12X_1X_2 - \lambda[2X_1 + 5X_2 + S_1^2 - 98] \qquad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial X_1} = 4X_1 + 12X_2 - 2\lambda = 0 \qquad (4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial X_2} = -14X_2 + 12X_1 - 5\lambda = 0 \qquad (5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial S_i} = -2S_i - \lambda = 0 \qquad (6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 2X_1 + 5X_2 + S_1^2 = 98 \qquad (7)$$

الحالة (1): من المعادلة رقم (6) نجد أن المعادلة تتحقق إذا كان واحد على الأقل من S_{1_1}، λ يساوي صفر، أي:

$$S_1 = 0 \text{ أو } \lambda = 0$$

من القيدين (2)، (3) نجد أن $_1 = X_2 = 0$ **وهذا لا يحقق المعادلة (7).**

الحالة (2): إذا كان $\lambda \neq 0$ فإن $S_1 = 0$ **(وهي الحالة لتحقيق القيد 2) فإن من** المعادلة (7) نجد أن:

$$X_2 = \frac{98 - 2X_1}{5}$$

بالتعويض ب X_2في المعادلتين (5)، (4) نجد أن

$$X_1^* = 44, \qquad X_2^* = 2 \ \ , \lambda^* = 100, \ \ Z^* = 4396$$

وبمـا أن $\lambda^* = 100$ فهـذا يعنـي أن الطـرف الأيمـن فـي القيـد (2) إذا تغيـر بوحـدة واحـدة بالزيـادة أو النقص) سوف يؤدي ذلك إلى زيادة أو نقص *z ب 100 وحدة.

مثال: باستخدام شروط كون - توكر أوجد الحل الأمثل للنموذج التاليM

$$Max.z = -X_1^2 + 2X_1 + X_2$$

$$S.T \quad 2X_1 + 3X_2 \le 6$$

$$2X_1 + X_2 \le 4$$

$$X_1, \ge 0, \ \ X_2 \ \ge 0$$

الحل:

1- يمكن تحويل القيود $X_1 \ge 0, \ \ X_2 \ge 0$ على النحو التالي:

$$-X_1, \le 0, \ \ -X_2 \ \le 0$$

- نكون دالة لأجرانج على النحو:

$$L(X_1, X_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, S_1, S_2, S_3, S_4)$$
$$= -X_1^2 + 2X_1 + X_2 - \lambda_1[2X_1 + 3X_2 + S_1^2 - 6]$$
$$- \lambda_2[2X_1 + X_2 + S_2^2 - 4] - \lambda_3[-X_1 + S_3^2] - \lambda_4[-X_2 + S_4^2]$$

2- نوجد نقط الاستقرار على النحو:

$$\frac{\partial L}{\partial X_1} = -2X_1 + 2 - 2\lambda_1 - 2\lambda - \lambda_3 = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial X_2} = 1 - 3\lambda_1 - 2\lambda + \lambda_4 = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 2X_1 + 3X_2 + S_1^2 - 6 = 0 \qquad (4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 2X_1 + X_2 + S_2^2 - 4 = 0 \qquad (5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_3} = -X_1 + S_3^2 = 0 \qquad (6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_4} = -X_2 + S_4^2 = 0 \qquad (7)$$

$$\frac{\partial L}{\partial S_1} = -2\lambda_1 S_1 = 0 \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial S_2} = -2\lambda_2 S_2 = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial L}{\partial S_3} = -2\lambda_3 S_3 = 0 \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial S_4} = -2\lambda_4 S_4 = 0 \quad (9)$$

ولكي تتحقق القيود (5),(4) في شكل متساويات فإن$S_1 = S_2 = 0$, ومن (8) فإنه يمكن أن يكونا $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$,وإذا كانت $X_1 = X_2 = 0$ فلا تتحقق القيود (5),(4) بالتالي فإن $S_3, S_4 \neq 0$ وهذا يعني من القيد (9) أنه لابد أن $\lambda_4 = 0$ ،$\lambda_3 = 0$ ويكون الحل الأمثل على النحو:

$$Z^* = \frac{5}{4}, X_1^* = \frac{3}{2}, X_2^* = 1, \lambda_1^* = \frac{5}{2}, \lambda_2^* = \frac{-13}{2}, \lambda_3^* = 0, \lambda_4^* = 0$$

$$S_1^* = 0, S_2^* = 1.054\ , \quad S_3^* = 0.3165, \qquad S_4^* = 1.247$$

مما سبق يتضح أنه قد توجد صعوبة في حل معادلات الاستقرار التي يمكن منها الحصول على نقط الاستقرار:

$$\frac{\partial L}{\partial X_j} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0\ , \frac{\partial L}{\partial S_i} = 0$$

وبصفة خاصة إذا كانت هذه المعادلات معادلات غير خطية وحجم المشكلة كبير. لذلك قدمت عديد من الخوارزميات للحصول على حلول تقريبية لمشاكل البرمجة غير الخطية وفقا لخصائص المشكلة.

ملحوظة:

لتحديد نوع نقطة الاستقرار (عظمى، أو صغري، أو غير ذلك) يتطلب ذلك إيجاد المصفوفة H^{B} عند نقطة الاستقرار X^*

وكما ذكرنا سابقا، بالنسبة لمشاكل البرمجة غير الخطية التي لا تحقق شروط كوهين-توكر فإنه توجد أساليب أخرى يمكن استخدامها للحصول على الحل الأمثل مثل البرمجة الهندسية Geometric Programming .

قائمة المــراجع

1. ابراهيم موى عبد الفتاح ،(2006):**مقدمة في بحوث العمليات (نماذج وتطبيقات)**،المكتبة العلمية ، كلية التجارة جامعة الزقازيق ،مصر .
2. اسماعيل السيد(1999): **بعض الطرق الكمية في مجال الأعمال** , الدار الجامعية للطبع و التوزيع الاسكندرية.
3. جلال إبراهيم العبد،(2014): **استخدام الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية**، دار الجامعة الجديدة، الإسكندرية، مصر.
4. حامد عد نور الشمرتي، علي خليل الزبيدي ، (2007):**مدخل الى بحوث العمليات** ،دار مجدلاوي للنشر و التوزيع ، الطبعة الولى ، المملكة الهاشمية الاردنية ، عمان .
5. حسن علي مشرقي ,(1997)، **نظرية القرارات الإدارية مدخل كمي في الإدارة** ,دار المسيرة للنشر و التوزيع الأردن الطبعة الأولى.
6. عبد الستار أحمد محمد الآلوسي، **(2003) : أساليب بحوث العمليات (الطرق الكمية المساعدة في اتخاذ القرار**، دار القلم للنشر، الإمارات العربية المتحدة
7. --عفاف علي حسن الدش ، (2012) : **بحوث العمليات و اتخاذ القرارات – الأساليب التطبيق استخدام الحزم الرياضية** – ،كلية التجارة و ادارة الاعمال حلوان ، مكتبة عين شم الطبعة الثانية، القاهرة
8. علي السلمي ، (1975) : **الأساليب الكمية في الإدارة** , القاهرة.
9. علي حازم اليامور،(2009) : **استخدام نموذج البرمجة الخطية في تحديد المزيج الإنتاجي الأمثل الذي يعظم الأرباح في ظل تطبيق نظرية القيود**، ورقة بحثية مقدمة للمؤتمر العلمي الثاني للرياضيات، الإحصاء و المعلوماتية، 6–7 ديسمبر ، كلية علوم الحاسبات و الرياضيات، جامعة الموصل، العراق.
10. محمد توفيق ماضي، (1992) ، **سلسلة الأساليب الكمية للجميع " البرمجة الخطية التوزيع الأمثل للموارد المحدودة** , "المكتب العربي الحديث , الإسكندرية.
11. محمد راتول، **بحوث العمليات**،(2006): ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، الطبعة الثانية،
12. منعم زمزير الموسوي، (2009) : **بحوث العمليات–مدخل علمي لاتخاذ القرارات**–، دار وائل للنشر، عمان، الأردن، الطبعة الأولى

13. يوسف صوار ، طاوس قندوسي، (دون سنة نشر) : **محاضرات في البرمجة الخطية – تمارين محلولة باستعمال برنامج Q.S.B–** كلية العلوم الاقتصادية التجارية و علوم التسيير، جامعة الدكتور الطاهر مولاي، سعيدة، ديوان المطبوعات الجامعية، وهران، الجزائر،

14. Gérald .Baillageon,(1996)**Programmation Linéaire Appliquée Outil D'aide A La Décision**,canada,édition SMG.

Yves Noobert , (1995) : Roch Ouellet .Réges Parent , **La recherche opérationnelle** ,gaitan morin éditeurو