جامعة باجي مختار–عنابة

UNIVERSITE BADJI MOKHTAR -ANNABA

كلية العلوم الاقتصادية وعلوم التسيير

Faculté des Sciences Economiques et Sciences de Gestion

ميدان التكوين في العلوم الاقتصادية، التجارية وعلوم التسيير

دروس وتمارينات في رياضيات المؤسسة

المقياس: رياضيات المؤسسة

التخصص: علوم مالية

المستوى: السنة الثانية

الدكتور رقامي محمد (علوم مالية، كلية العلوم الاقتصادية وعلوم التسيير، جامعة باجي مختار عنابة)

السنة الجامعية: 2021/2020

فهرس المحتويات:

العنوان:	الصفحة
فهرس المحتويات	أ
المقدمة	1
الفصل الأول: حل مسألة البرمجة الخطية بإستعمال الطريقة الهندسية (الحل البياني)	2
أولا: تعريف البرمجة الخطية	2
ثانيا: الخطوات المتبعة لحل مسألة البرمجة الخطية	3
ثالثا: الحالات الخاصة في الحل البياني لمسألة البرمجة الخطية	4
الفصل الثاني: حل البرنامج الخطي باستخدام طريقة السمبلاكس	19
أولا: طريقة حل البرنامج الخطي في حالة التعظيم حسب الصيغة القانونية	19
ثانيا: طريقة حل البرنامج الخطي في حالة تعظيم والقيود ليست حسب الصيغة القانونية	27
ثالثا: طريقة حل البرنامج الخطي في حالة التقليل	35
رابعا: الحالات الخاصة في حل البرنامج الخطي باستخدام طريقة السمبلاكس	43
الفصل الثالث: المسألة الثنائية (النموذج المقابل)	54
الفصل الرابع: تحليل الحساسية	81
أولا: تحليل الحساسية أثناء التغيير في الطرف الأيمن للقيود b (الموارد المتاحة)	82
ثانيا: تحليل الحساسية عند التغيير في معاملات دالة الهدف	84
الفصل الخامس: حل مسائل النقل	98
أولا: حل مسائل النقل في حالة التقليل	98
ثانيا: حل مسائل النقل في حالة تعظيم الأرباح	109
ثالثا: حالات خاصة في حل مسائل النقل	114
الفصل السادس: مدخل إلى البرمجة غير الخطية	119
أولا: البرمجة غير خطية ذات المتغير الواحد بقيود تشغيلية	119
ثانيا: البرمجة غير الخطية وبدون قيود تشغيلية	122
ثالثا: البرمجة غير الخطية متعددة المتغيرات وبقيود معادلات	124
رابعا: البرمجة غير الخطية متعددة المتغيرات وبقيود متراجحة	128
قائمة المراجع	132

مقدمة:

رياضيات المؤسسة هي علم يعتمد على مختلف الطرق العلمية التي تساعد على اتخاذ قرارات غالبا ما تكون بأرقام محددة ضمن مختلف العمليات الإدارية للمؤسسة الاقتصادية بالخصوص، فهي لا تعتمد على وصف الظواهر والتجارب بل تعتمد على أسلوب رياضي في صياغة المشاكل الإدارية وحلها، وتعتبر من بين أهم أنواع الرياضيات التي تدرس في كلية العلوم الاقتصادية وعلوم التسيير والتي تدخل ضمن الرياضيات المستخدمة في العلوم المالية والعلوم التجارية والمطبقة خاصة في المؤسسات.

تستخدم المؤسسات الاقتصادية أدوات ومبادئ رياضيات المؤسسة في تحديد قيم المتغيرات التي تعظم أو تقلل دوال الهدف المختلفة.

إن الموضوع الرئيسي والمهم في رياضيات المؤسسة هو القيم المثلى، ودراسة القيم المثلى لا تأخذ أهميتها من كونها تستعمل من قبل المؤسسات الاقتصادية لتحقيق الجدوى الاقتصادية فقط بل كذلك من قبل الأفراد لتحديد الكميات المستهلكة لتعظيم الإشباع، لذا كان لابد من إعداد هذه المطبوعة في مقياس رياضيات المؤسسة وكذا محاولة تغطية هذا الموضوع بأسلوب مبسط يسهل على طالب سنة ثانية علوم تجارية فهم واستيعاب مبادئها.

ولأجل التطرق إلى كل هذه المفاهيم تم تقسيم المطبوعة إلى ستة فصول وهي:

الفصل الأول: حل مسألة البرمجة الخطية بإستعمال الطريقة الهندسية (الحل البياني)

الفصل الثاني: حل البرنامج الخطي باستخدام طريقة السمبلاكس

الفصل الثالث: المسألة الثنائية (النموذج المقابل)

الفصل الرابع: تحليل الحساسية

الفصل الخامس: حل مسائل النقل

الفصل السادس: مدخل إلى البرمجة غير الخطية

الفصل الأول: حل مسألة البرمجة الخطية بإستعمال الطريقة الهندسية (الحل البياني)

أولا: تعريف البرمجة الخطية: هي أسلوب رياضي يعتمد عليه لإيجاد الحل الأمثل وذلك وفق خطوات محددة ومنه جاء مصطلح برمجة، أما مصطلح خطية نتج من كون القيود هي عبارة عن متباينات خطية[1].

وبما أن المؤسسة الاقتصادية تستعمل الموارد النادرة وفق مختلف الاستخدامات وذلك بهدف تحقيق أقصى ربح وهذا حسب المعادلة التالية:

الربح = الإيراد الكلي – التكلفة الكلية

من المفروض التطرق لفرضيات البرمجة الخطية قبل معرفة طريقة حلها وهي تمثل الشروط العلمية الواجب توفرها في المشكلة حتى نستطيع حلها من خلال البرمجة الخطية، وتتمثل فيما يلي:[2]

- الخطية: أي وجود علاقة خطية بين المتغيرات في كل من دالة الهدف وكذلك القيود؛
- الإضافية: أي عدم وجود تداخل في إنتاج سلعتين على نفس الآلة، بل الوقت الإجمالي للنشاط هو الوقت الخاص بإنتاج السلعة الأولى زائد الوقت الخاص بإنتاج السلعة الثانية وهكذا؛
- القابلية للضرب والقسمة: أي هناك إمكانية الحساب من خلال الطريقة الثلاثية لكميات الإنتاج أو المواد الأولية اللتان تجمعها علاقة طردية، وأنه توجد علاقة طردية بين المدخلات والمخرجات في دالة الهدف؛
- الأرقام الحقيقية: أي أنه يمكن الاعتماد على الكسور بالإضافة إلى الأعداد الطبيعية، مع تجنب الاعتماد على الأعداد التي بها فواصل لأنها تكون بالتقريب فلا تخدم البحث على الحل الأمثل؛
- عدم السالبية: وذلك فيما يخص قيم المتغيرات لكي يكون هناك انسجام مع أن الكميات لا تكون سالبة؛

---

[1] مراد كمال عوض، (2009): الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية، دار البداية، الطبعة الأولى: عمان، الأردن، ص ص 23-24.

[2] علي العلاونة، محمد عبيدات وعبد الكريم عواد، (2005): بحوث العمليات في العلوم التجارية، مركز يزيد للنشر، الطبعة الأولى: عمان، الأردن، ص ص 129- 130.

- التأكد: القيم العددية الموجودة في دالة الهدف والقيود معروفة ولا تتغير في فترة الدراسة[1].

ثانيا: الخطوات المتبعة لحل مسألة البرمجة الخطية

1- وضع صياغة البرمجة الخطية

1-1 تحديد طبيعة المشكلة؛

2-1 تحديد المتغيرات؛

3-1 تحديد دالة الهدف؛

4-1 تحديد القيود والتي تكون في شكل قيود خطية تعبر عن العلاقة بين المتغيرات القرارية والإمكانيات المتاحة[2]، وهناك ثلاثة أنواع وهي قيد فيه أصغر او يساوي من خلاله يتم تبين الحد الأعلى الذي لا يمكن تجاوزه وقيد فيه أكبر او يساوي من خلاله يتم تبين الحد الأدنى الذي يجب تحقيقه وقيد فيه يساوي وعن طريقه يتم تبين مثلا الموارد الذي يجب استخدامها كليا دون زيادة أو نقصان[3]؛

5-1 التكوين النهائي للمشكلة.

2- حل صياغة البرمجة الخطية

1-2 تحديد منطقة الحلول الممكنة؛

1-1-2 تحويل المتراجحات إلى معادلات؛

2-1-2 رسم جميع المستقيمات المقابلة لكل معادلة في معلم متعامد متجانس واحد؛

2-2 تحديد الحل الأمثل وذلك بالاعتماد على رؤوس المضلع.

ويمكن القول بأن الحل البياني يكون بالاعتماد على مستقيمات تقسم المستوي إلى نصفين أحدهما مقبول والأخر مرفوض، وعملية القبول تكون حسب الانسجام مع المتراجحة، وأخيرا تحديد قيمة النهاية العظمى أو الصغرى. والحل البياني يكون من خلال الخطوات التالية:

---

[1] جهاد صباح بني هاني، نازم محمود الملكاوي وفاتح عبد القادر الحوري، (2009): بحوث العمليات والأساليب الكمية، دار جليس الزمان للنشر والتوزيع: عمان، الأردن، ص 28.

[2] دلال صادق الجواد وحميد ناصر الفتال، (2008): بحوث العمليات، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع: عمان، الأردن، ص 24.

[3] أكرم محمد عرفان المهتدين (2004): الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية، دار صفاء للنشر والتوزيع : عمان، الأردن، ص ص 19- 20.

1* النموذج الرقمي للمشكلة الاقتصادية يكون في شكل متراجحات التي يتم تحويلها إلى معادلات مستقيمات، وكل مستقيم يتم رسمه بالاعتماد على جدول مساعد، وذلك لاستنتاج إحداثيات نقطتين من خلالهما يتم رسمه. وفي الأخير يكون لدينا مجموعة مستقيمات في نفس المستوي.

2* حسب الهندسة التحليلية فإن المستقيم يقسم المستوي إلى نصفين، أحدهما يتوافق مع المتراجحة، فحينها يتم تحديد إحداثيات نقطة بحيث لا تقع على المستقيم وتعوضهما في المتراجحة، فان تحققت فإن نصف المستوي الذي تقع فيه هذه النقطة هو المقبول، وإن لم تتحقق فان النصف الأخر هو المقبول.

3* للقيام بتحديد المنطقة المقبولة فإننا نقاطع بين كل أنصاف المستوي المقبولة، فتتحد منطقة مقبولة، والتي تكون إما مغلقة برؤوس محددة أو نصف مفتوحة بها رؤوس أو مفتوحة بدون رؤوس.

4* نعوض إحداثيات رؤوس المنطقة المقبولة في دالة الهدف، وذلك لتحديد قيمتها.

ثالثا: الحالات الخاصة في الحل البياني لمسألة البرمجة الخطية

ويمكن ذكر بعض الحالات الخاصة، وهي:

1- حالة الحلول المتعددة: وتكون لما يكون الرسم البياني لدالة الهدف ينطبق مع مستقيم معبر عن أحد القيود، فتكون كل نقاط القطعة المستقيمة المنتمية لهذا المستقيم وتنتمي في كذلك إلى منطقة الحلول الممكنة تمثل مجموعة حلول متعددة (غير منتهية) لهذا البرنامج.

2- حالة مسألة بدون منطقة حلول ممكنة: وتحدث هذه الحالة في حالة قيود البرنامج متضاربة.

3- حالة مسألة بدون حل ممكن: وتكون لما يمكن زيادة بعض المتغيرات إلى ما لا نهاية دون خرق أي قيد من قيود البرنامج، فتكون منطقة الحلول الممكنة غير محددة من جهة واحدة على الأقل، فيمكن حينها زيادة دالة الهدف في حالة التعظيم أو تخفيض دالة الهدف في حالة التقليل بدون حدود.

التمرين رقم 1:

هناك مصنع متخصص في إنتاج المكاتب والخزائن وقد قدر سعر بيع الخزانة الواحدة بـ 200 دج وتكلفة الوحدة الواحدة بـ 180 دج أما سعر بيع المكتب الواحد بـ 240 دج وتكلفته 190 دج. وبعد دراسة السوق وجد أن الحد الأقصى للطلب على الخزائن هو 3000 وحدة، والحد الأقصى للطلب على المكاتب هو 1750 وحدة وذلك في السنة الواحدة، مع وجود معلومات مؤكدة أن الطلب على المكاتب أقل أو يساوي 75 % من الطلب على الخزائن + 250، والحد الأقصى لإنتاج المصنع هو 4500 مكتب أو خزانة.

المطلوب:

تحديد عدد المكاتب والخزائن الذي يعطي أقصى ربح ممكن، وما هي قيمة هذا الربح؟

الحل:

وضع صياغة البرمجة الخطية

1: تحديد طبيعة المشكلة: المشكلة قيد الدراسة هو الوصول إلى أقصى ربح وذلك من خلال إنتاج وبيع المكاتب والخزائن.

2: تحديد المتغيرات

x_1: عدد الوحدات المنتجة والمباعة من الخزائن.

x_2: عدد الوحدات المنتجة والمباعة من المكاتب.

3: تحديد دالة الهدف

$$\Pi = \Pi_1 \times x_1 + \Pi_2 \times x_2$$

$$\Pi = (rt_1 - ct_1) \times x_1 + (rt_2 - ct_2) \times x_2$$

$$\Pi = (200 - 180) \times x_1 + (240 - 190) \times x_2$$

$$\Pi = 20\, x_1 + 50\, x_2$$

4: تحديد القيود

أولا: القيود التشغيلية

$$x_1 \leq 3000$$

$$x_2 \leq 1750$$

$$x_2 \leq \frac{3}{4} x_1 + 250$$

$$x_1 + x_2 \leq 4500$$

ثانيا: القيود المعبرة عن عدم السالبية

$$x_1 \geq 0$$

$$X_2 \geq 0$$

5: التكوين النهائي للمشكلة.

أوجد النهاية العظمى لدالة الربح $\Pi = 20\,x_1 + 50\,x_2$ وذلك بمراعاة القيود التالية:

$x_1 \leq 3000$

$x_2 \leq 1750$

$x_2 \leq \frac{3}{4}\,x_1 + 250$

$x_1 + x_2 \leq 4500$

$x_1 \geq 0$

$X_2 \geq 0$

حل صياغة البرمجة الخطية

1- تحديد منطقة الحلول الممكنة

تحويل المتراجحات إلى معادلات ووضع الجدول المساعد

ملاحظة: لما تكون متغيرة واحدة تظهر في المعادلة فإن مهما تكن قيمة المتغيرة الغير ظاهرة فان قيمة المتغيرة الظاهرة هي قيمة الطرف الثاني. ولما تكون هناك متغيرتين ظاهرتان في المعادلة فإننا نضع مرة المتغيرة الأولى تساوي الصفر ونحدد قيمة المتغيرة الثانية فتتشكل لدينا إحداثيات النقطة الأولى وبعدها نضع المتغيرة الثانية تساوي الصفر ونحدد قيمة المتغيرة الأولى فتتشكل لدينا إحداثيات النقطة الثانية ومن خلال النقطتان نرسم المستقيم الخاص بهذه المعادلة.

(1) $x_1 = 3000$

x_1	3000	3000
x_2	0	1000

(2) $x_2 = 1750$

x_1	0	1000
x_2	1750	1750

(3) $x_2 = \frac{3}{4} x_1 + 250$

x_1	0	1000
x_2	250	1000

(4) $x_1 + x_2 = 4500$

x_1	0	4500
x_2	4500	0

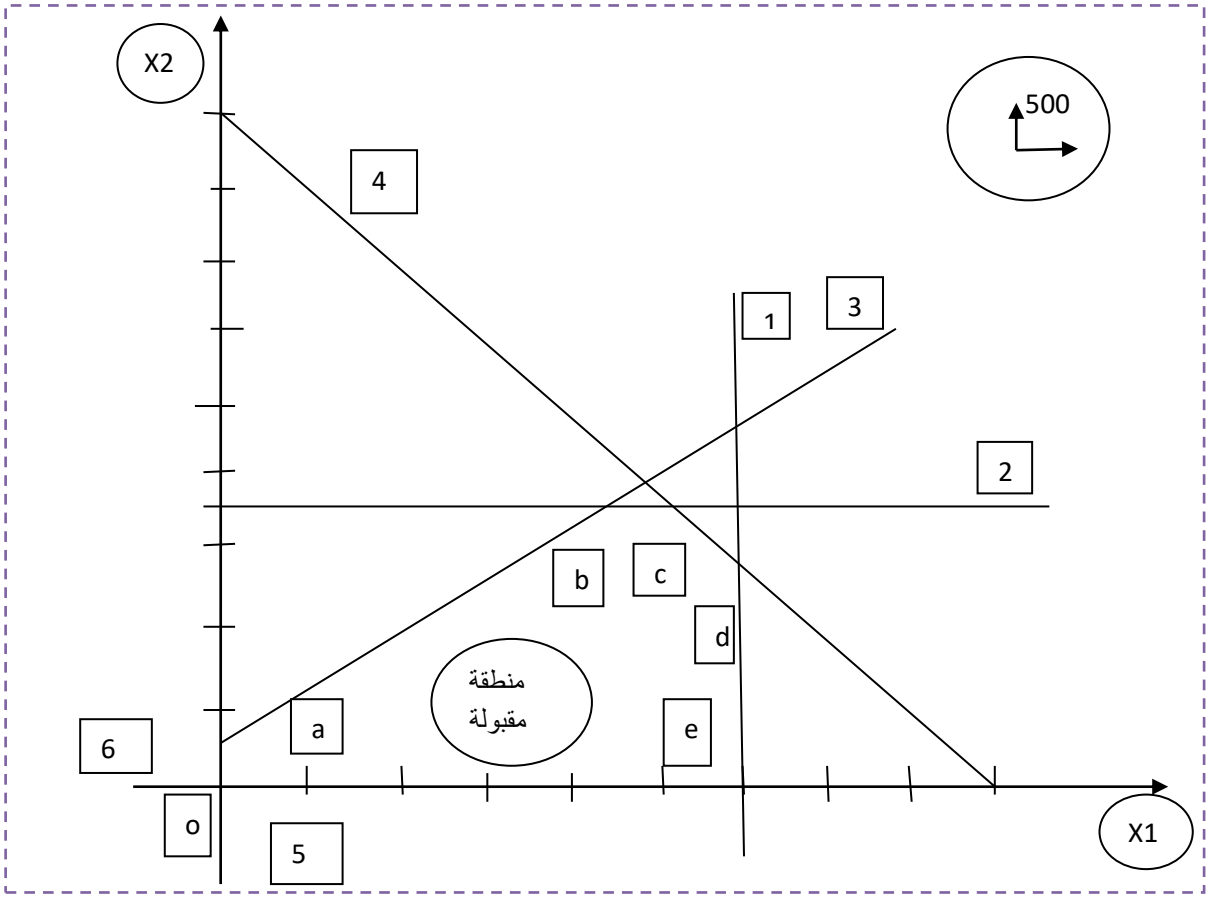
(5) $x_1 = 0$

x_1	0	0
x_2	0	1000

(6) $X_2 = 0$

x_1	0	1000
x_2	0	0

2- رسم جميع المستقيمات المقابلة لكل المعادلات في معلم متعامد متجانس واحد



$\Pi = 20\,x_1 + 50\,x_2$

O (0, 0) $\Pi = 0$

a (0, 250) $\Pi = 12500$

b (2000, 1750) $\Pi = 127500$

c (2750, 1750) $\Pi = 142500$

d (3000, 1500) $\Pi = 13500$

e (3000, 0) $\Pi = 60000$

عند المقارنة نجد أن c (2750, 1750) $\Pi = 142500$

هي التي تعطي أكبر ربح ومنه علينا أن ننتج ونبيع 2750 خزانة و1750 مكتب وذلك ما يمكن المؤسسة من تحقيق ربح قيمته 142500 دج.

التمرين رقم 2:

لصنع نوعين من النقانق قام الجزار بخلط لحم الغنم والبقر بحيث كيلوغرام من النقانق العادية يحتوي 0.2 كيلوغرام من البقر و0.2 كيلوغرام من الغنم، أما النقانق الممتازة فتحتوي 0.4 كيلوغرام من البقر و0.2 كيلوغرام من الغنم، ودراسة السوق بينت أن الربح من بيع كيلوغرام من النقانق العادية هو 10دج والربح من بيع كيلوغرام من النقانق الممتازة هو 12دج. مع العلم أن ما يتوفر للجزار هو 20 كيلوغرام من لحم الغنم 30 كيلوغرام من لحم البقر.

المطلوب: حدد أقصى ربح ممكن أن يحققه الجزار؟

الحل:

نعتبر x_1 يمثل عدد الكيلوغرامات من النقانق العادية المنتجة والمباعة ونعتبر أن x_2 يمثل عدد الكيلوغرامات من النقانق الممتازة المنتجة والمباعة.

فتتشكل لدينا القيود التالية

$0.2\ x_1 + 0.2\ x_2 \leq 20$

$0.2\ x_1 + 0.4\ x_2 \leq 30$

$x_1, x_2 \geq 0$

فتكون دالة الربح من الشكل

$\Pi = 10\ x_1 + 12\ x_2$

1- تحديد منطقة الحلول الممكنة

تحويل المتراجحات إلى معادلات ووضع الجدول المساعد بوضع مرة x1 يساوي الصفر ونعوض في معادلة المستقيم فنجد قيمة x2 وهما احداثيات النقطة الأولى، ثم نضع x2 يساوي الصفر ونعوض في معادلة المستقيم فنجد قيمة x1 وهما احداثيات النقطة الثانية.

(1) $0.2\ x_1 + 0.2\ x_2 = 20$

x_1	0	100
X_2	100	0

(2) $0.2\ x_1 + 0.4\ x_2 = 30$

x_1	0	150
X_2	75	0

(3) $x_1 = 0$

x_1	0	0
$_2X$	0	100

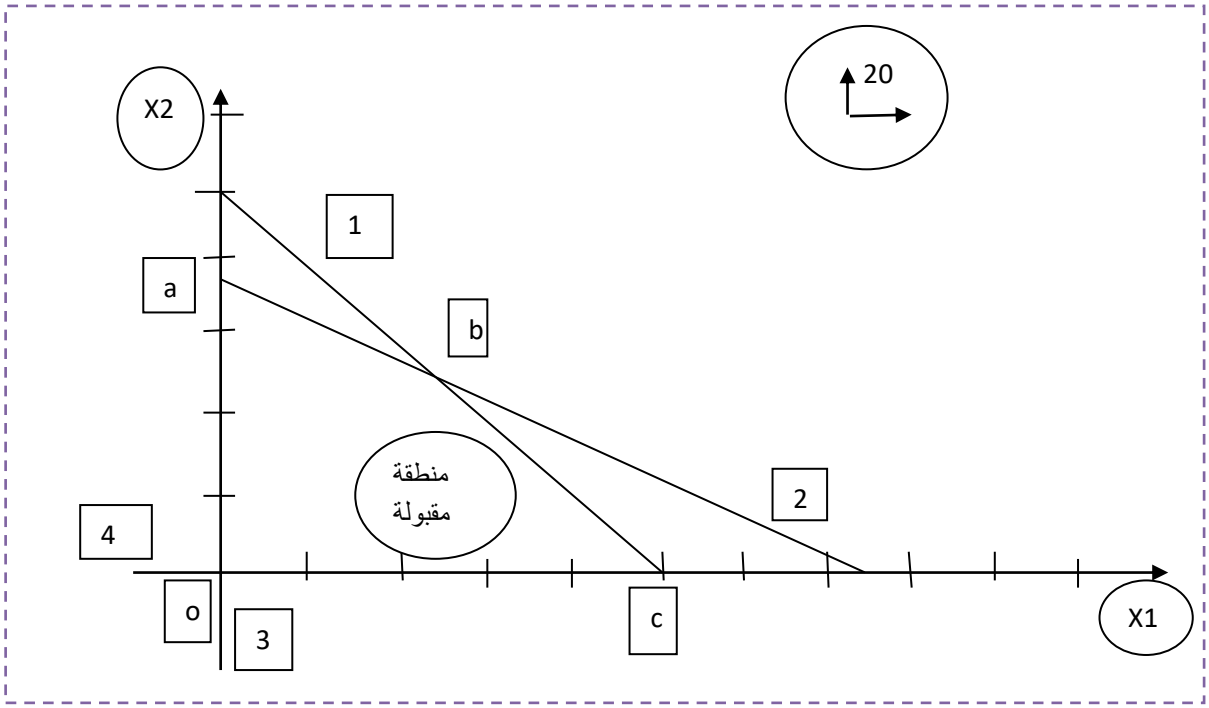
مهما يكن x2 فان $x_1 = 0$

(4) $X_2 = 0$

x_1	0	100
$_2X$	0	0

مهما يكن x1 فان $x_2 = 0$

2- رسم جميع المستقيمات المقابلة لكل معادلة في معلم متعامد متجانس واحد



نحدد إحداثيات b من خلال جملة المعدلتان (1) و (2) فنجد

$\Pi = 10\,x_1 + 12\,x_2$

O (0, 0) $\Pi = 0$

a (0, 75) $\Pi = 900$

b (50, 50) $\Pi = 1100$

c (100, 0) $\Pi = 1000$

عند المقارنة نجد أن **b** (50, 50) $\Pi = 1100$

هي التي تعطي أكبر ربح ومنه علينا أن ننتج ونبيع 50 كيلوغرام من النقانق العادية و50 كيلوغرام من النقانق الممتازة وذلك ما يمكن الجزار من تحقيق ربح قيمته 1100 دج.

التمرين رقم 3:

شخص يستهلك جبن وخبز، وبعد دراسة حاجياته الغذائية كانت النتيجة أنه يحتاج 3000 سعرة حرارية 100 غرام بروتين، مع العلم أن الخبز يوفر 1000 سعرة حرارية و25 غرام بروتين، أما الجبن فيوفر 2000 سعرة حرارية و100 غرام بروتين.

مع العلم أن سعر الكيلوغرام من الخبز هو 24 دج وسعر الكيلوغرام من الجبن هو 84 دج.

المطلوب:

ما هي كمية الخبز والجبن التي تحقق لهذا الشخص القيمة الغذائية التي يحتاجها بأقل تكلفة؟

الحل:

نعتبر x_1 يمثل عدد الكيلوغرامات من الخبز المستهلكة ونعتبر أن x_2 يمثل عدد الكيلوغرامات من الجبن المستهلكة.

فتتشكل لدينا القيود التالية

$$1000\, x_1 + 2000\, x_2 \geq 3000$$

$$25\, x_1 + 100\, x_2 \geq 100$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

فتكون دالة التكلفة من الشكل

$$C = 24\, x_1 + 84\, x_2$$

1- تحديد منطقة الحلول الممكنة

تحويل المتراجحات إلى معادلات ووضع الجدول المساعد

(1) $1000\, x_1 + 2000\, x_2 = 3000$

x_1	0	3
x_2	$\frac{3}{2}$	0

(2) $25\, x_1 + 100\, x_2 = 100$

x_1	0	4
x_2	1	0

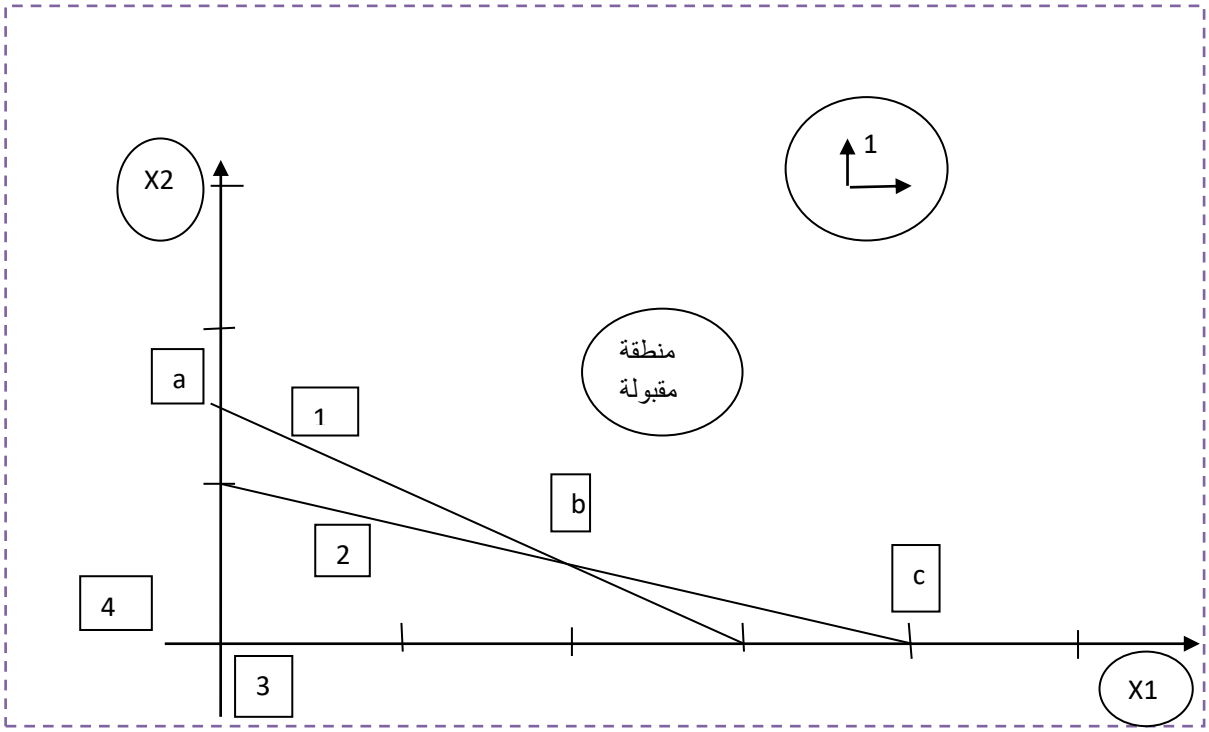
(3) $x_1 = 0$

x_1	0	0
x_2	0	5

(4) $X_2 = 0$

x_1	0	5
x_2	0	0

2- رسم جميع المستقيمات المقابلة لكل معادلة في معلم متعامد متجانس واحد



نحدد إحداثيات b من خلال جملة المعدلتان (1) و (2) فنجد

$C = 24\ x_1 + 84\ x_2$

a $(0, 1.5)$ $C = 126$

b $(2, 0.5)$ $C = \mathbf{90}$

c $(4, 0)$ $C = 96$

عند المقارنة نجد أن $C = 1100$ **b** $(2,0.5)$

هي التي تعطي أصغر تكلفة ومنه عليه أن يستهلك 2 كيلوغرام من الخبز و0.5 كيلوغرام الجبن وذلك ما يوفر احتياجاته بأقل تكلفة والتي تساوي 1100 دج.

التمرين رقم 4:

$\max \pi = 2\, x_1 + 3\, x_2$

$x_2 \geq 2\, x_1 + 7$

$x_2 \leq -2\, x_1 + 7$

$x_1, x_2 \geq 0$

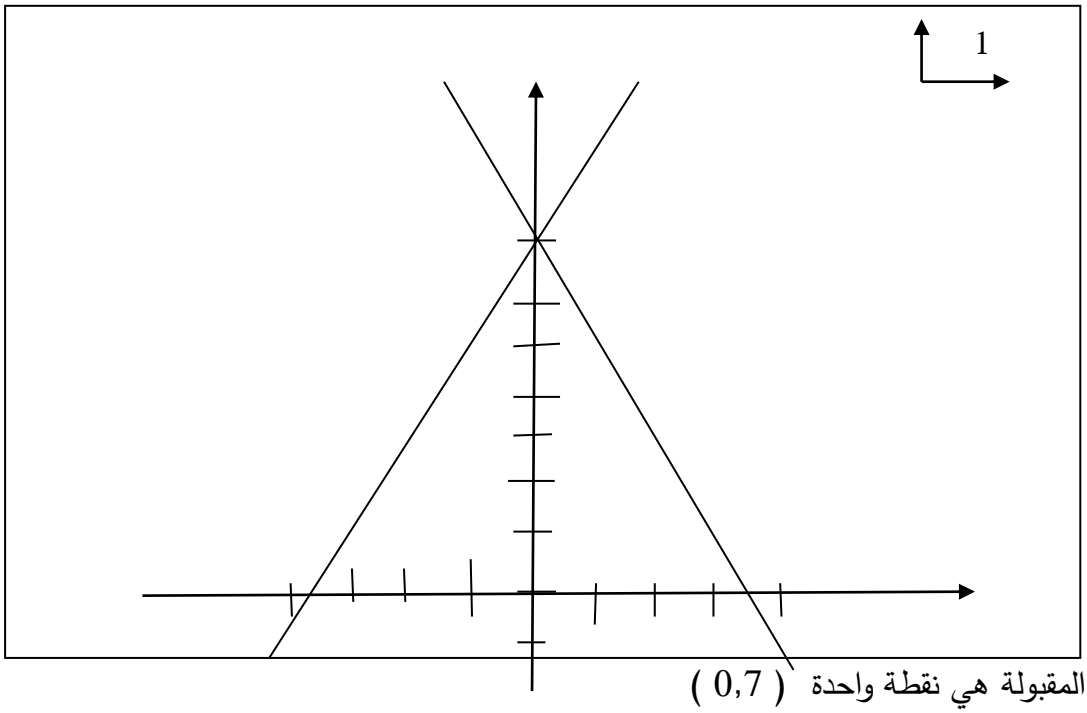
الحل:

$x_2 = 2\, x_1 + 7 \qquad (1)$

x_1	0	$-\frac{7}{2}$
x_2	7	0

$x_2 = -2\, x_1 + 7 \qquad (2)$

x_1	0	$\frac{7}{2}$
x_2	7	0



المنطقة المقبولة هي نقطة واحدة $(0,7)$

$\max \pi = 2 \times 0 + 3 \times 7 = 21$

التمرين رقم 5:

Min c = $3\ x_1 + 2\ x_2$

$2\ x_1 - x_2 \geq 8$

$6\ x_1 - 3\ x_2 \leq 16$

$x_1, x_2 \geq 0$

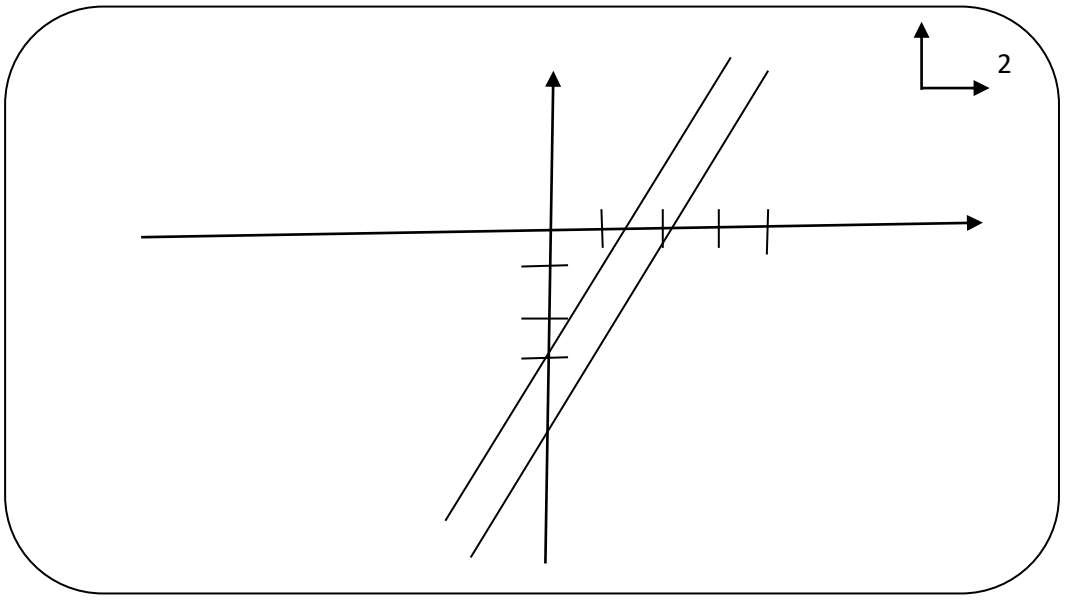
الحل:

$2\ x_1 - x_2 = 8$

x_1	0	4
x_2	− 8	0

$6\ x_1 - 3\ x_2 = 16$

x_1	0	$\frac{8}{3}$
x_2	$-\frac{16}{3}$	0



لا توجد منطقة مقبولة إذن لا توجد نهاية، وهي توافق الحالة الخاصة مسألة بدون منطقة حلول ممكنة

التمرين رقم 6:

أوجد النهاية العظمى لدالة الربح $\Pi = 2\ x_1 + 19\ x_2$

وذلك بمراعاة القيود التالية:

$x_1 \geq 20$

$x_2 \geq 10$

$x_1, X_2 \geq 0$

1- تحديد منطقة الحلول الممكنة

تحويل المتراجحات إلى معادلات ووضع الجدول المساعد

(1) $x_1 = 20$

x_1	20	20
x_2	0	10

(2) $x_2 = 10$

x_1	0	20
x_2	10	10

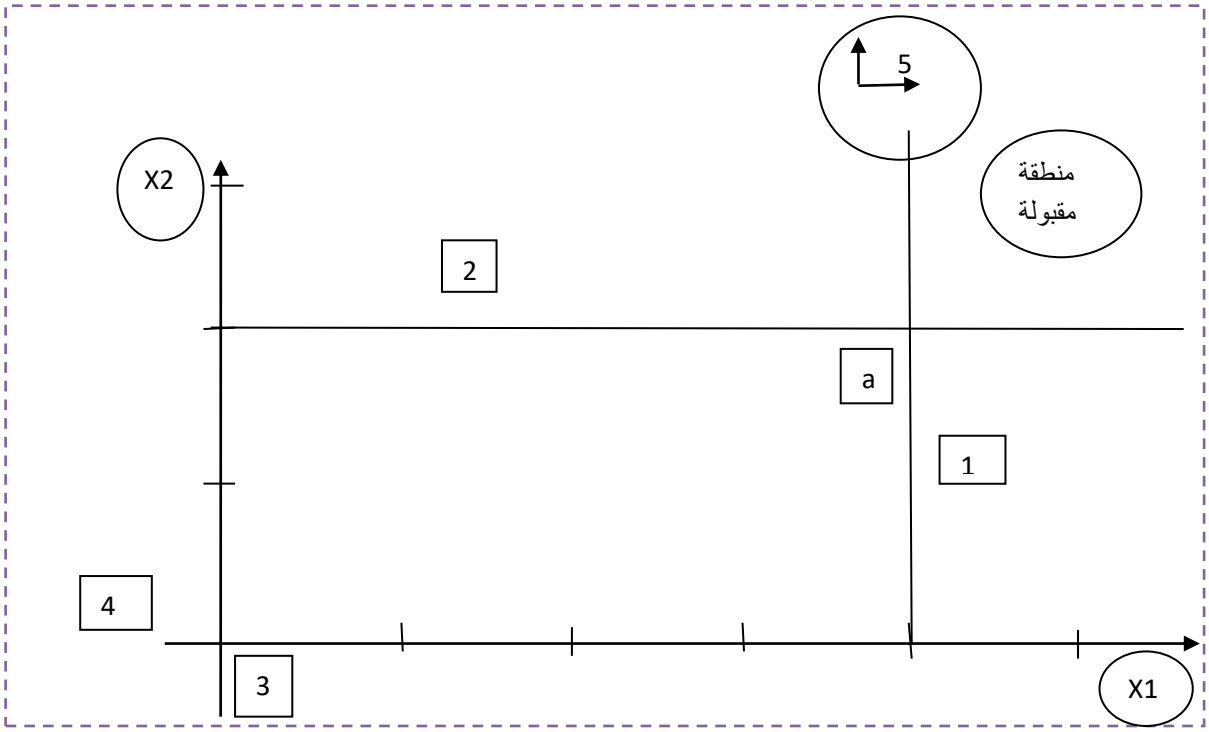
(3) $x_1 = 0$

x_1	0	0
x_2	0	5

(4) $X_2 = 0$

x_1	0	5
x_2	0	0

2- رسم جميع المستقيمات المقابلة لكل معادلة في معلم متعامد متجانس واحد



نحدد إحداثيات a من خلال جملة المعدلتان (1) و (2) فنجد

$$\Pi = 2\,x_1 + 19\,x_2$$

a (20, 10) $\Pi = 230$

لو نختار أي نقطة من منطقة الحلول الممكنة ونعوض إحداثياتها في دالة الهدف

b(100, 100) $\Pi = 2100$

نلاحظ أنها تعطينا ربح اكبر من 230 ويمكننا ان نظيف أي كمية من التغيريين دون خرق اي قيد ونحقق ربح اكبر ومنه النقطة الزاوية a هي ليست نهاية عظمى و منه نكون في حالة خاصة وهي حالة مسألة بدون حل ممكن.

التمرين رقم 7:

أوجد النهاية العظمى لدالة الربح $\Pi = 3\,x_1 + 2\,x_2$

وذلك بمراعاة القيود التالية:

$6\,x_1 + 4\,x_2 \leq 24$

$x_1 + 5\,x_2 \leq 10$

$x_1, X_2 \geq 0$

1- تحديد منطقة الحلول الممكنة

تحويل المتراجحات إلى معادلات ووضع الجدول المساعد

(1) $6\,x_1 + 4\,x_2 = 24$

x_1	0	4
X_2	6	0

(2) $x_1 + 5\,x_2 = 10$

x_1	0	10
X_2	2	0

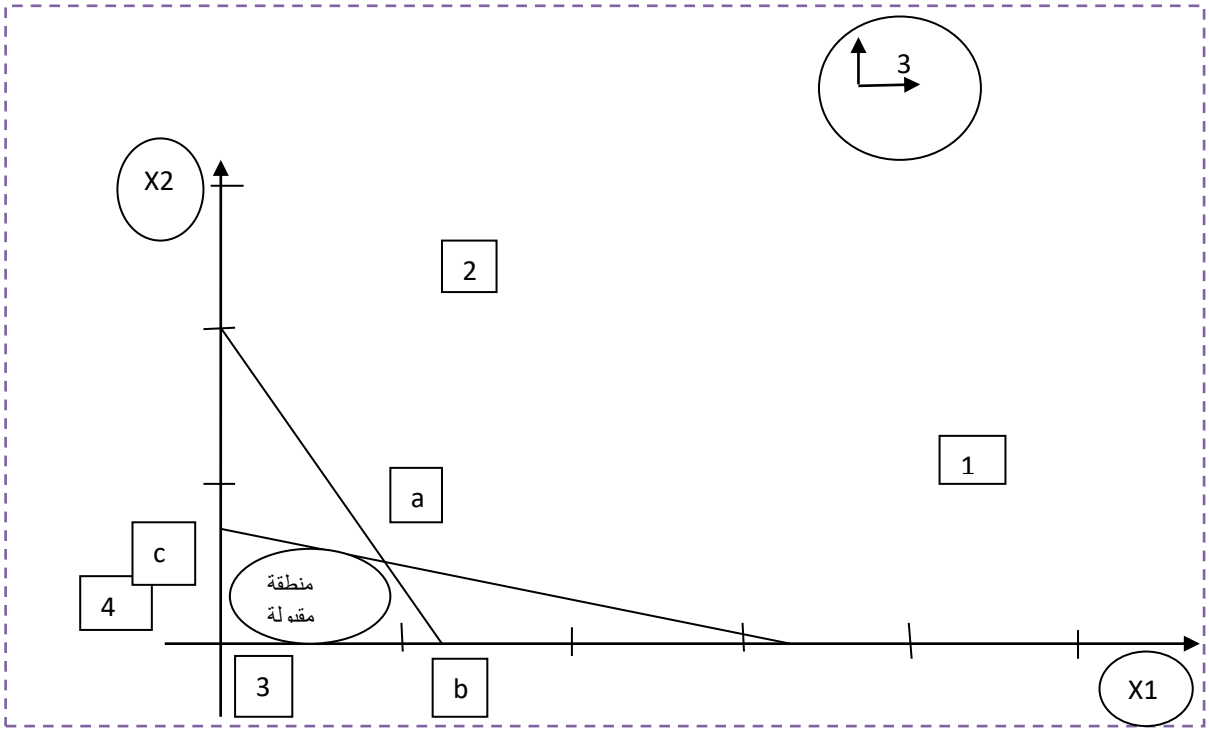
(3) $x_1 = 0$

x_1	0	0
X_2	0	5

(4) $X_2 = 0$

x_1	0	5
X_2	0	0

2- رسم جميع المستقيمات المقابلة لكل معادلة في معلم متعامد متجانس واحد



نحدد إحداثيات a من خلال جملة المعدلتان (1) و (2) فنجد

$6\,x_1 + 4\,x_2 = 24$ $\quad 6\,(10 - 5\,x_2) + 4\,x_2 = 24$ $\quad 36 = 26\,x_2$ $\quad x_2 = \frac{18}{13}$

$x_1 + 5\,x_2 = 10$ $\quad x_1 = 10 - 5\,x_2$ $\quad x_1 = 10 - 5\,\frac{18}{13} = \frac{40}{13}$

$\Pi = 3\,x_1 + 2\,x_2$

a $(\frac{40}{13}, \frac{18}{13})$ $\Pi = \frac{156}{13} = 12$

b $(4, 0)$ $\Pi = 12$

c $(0, 2)$ $\Pi = 4$

ومنه كل النقاط التي تنتمي للقطعة المستقيمة [a–b] إحداثياتها تعتبر نقطة عظمى لهذه الدالة، فنكون في حالة خاصة وهي حالة الحلول المتعددة.

الفصل الثاني: حل البرنامج الخطي باستخدام طريقة السمبلاكس

1- تحديد الصيغة القانونية

1-1 حالة التعظيم

- دالة الهدف يجب أن تكون في حالة تعظيم؛
- جميع القيود يجب أن تكون أصغر أو يساوي عددا ثابتا موجبا؛
- جميع المتغيرات يجب أن تكون غير سالبة.

1-2 حالة التقليل

- دالة الهدف يجب أن تكون في حالة تقليل؛
- جميع القيود يجب أن تكون أكبر أو يساوي؛
- جميع المتغيرات يجب أن تكون غير سالبة.

ملاحظة: الصيغة القانونية ضرورية للبدا في استعمال طريقة السمبلاكس، فيجب تحويل أي صيغة إلى الشكل القانوني قبل البداية في الحل.

أولا: طريقة حل البرنامج الخطي في حالة التعظيم حسب الصيغة القانونية

نقوم بتحويل كل المتراجعات إلى معادلات وذلك بإضافة متغيرة تسمى بمتغيرة الفجوة ونرمز لها بالشكل x^e وهي تمثل الطاقات الغير مستعملة وهي كذلك يجب أن تكون غير سالبة، بحيث عند إدخالها إلى القيود فإنه من الضروري إضافتها إلى دالة الهدف وذلك بمعاملات صفرية.

التمرين رقم 8:

$$\text{Max } \pi = 2x_1 + 9x_2 + x_3$$

$$2x_1 + 2x_2 + 7x_3 \leq 10$$

$$x_1 + 3x_3 \leq 7$$

$$x_1 + 17x_2 + 15x_3 \leq 25$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

المطلوب: تحديد الكميات x_1, x_2, x_3 ؟

الحل: نقوم بتحويل المتراجحات إلى معادلات

$2x_1 + 2x_2 + 7x_3 + x_4^e = 10$

$x_1 + 3x_3 + x_5^e = 7$

$x_1 + 17x_2 + 15x_3 + x_6^e = 25$

$x_1, x_2, x_3, x_4^e, x_5^e, x_6^e \geq 0$

إضافات متغيرات الفجوة إلى دالة الهدف

$\text{Max } \pi = 2x_1 + 9x_2 + x_3 + 0x_4^e + 0x_5^e + 0x_6^e$

ثم نشكل الجدول الأساسي الأول

	x_1	x_2	X_3	X_4^e	X_5^e	X_6^e	Bi	bi / xi
X_4^e	2	2	7	1	0	0	10	5
X_5^e	1	0	3	0	1	0	7	∞
X_6^e	1	17	15	0	0	1	25	$\frac{25}{17}$ ←
dz	2	9 ↑	1	0	0	0	0	

- العمود bi يمثل الثوابت بالقيود أي الطرف الأيمن من المعادلات؛
- المتغيرات الحقيقية x لا تكون كمتغيرات أساس في الجدول الأساسي الأول؛
- قيمة كل متغيرة من متغيرات الأساس هي القيمة المقابلة لها في العمود bi، وأن أي متغيرة ليست ضمن متغيرات الأساس قيمتها صفر؛
- حتى يكون الجدول الأساسي أمثل يجب أن تكون جميع عناصر السطر الأخير dz سالبة أو معدومة؛

وعندما لا يكون الجدول الأساسي أمثل، فإنه يجب الانتقال إلى الجدول الأساسي الموالي وذلك بالقيام بما يلي:

1- المتغيرة التي تدخل الأساس هي التي تقابل أكبر معامل موجب في السطر dz وعمودها يسمى بعمود الارتكاز؛

2- المتغيرة التي تخرج من الأساس هي التي تقابل أصغر نسبة موجبة الناتجة عن تقسيم عمود الثوابت bi على عناصر عمود الارتكاز المقابلة لها فيتشكل لدينا bi / xi وصفها يسمى صف الارتكاز، فيتم تحديد نقطة الارتكاز التي هي تقاطع صف وعمود الارتكاز؛

3- نقوم بتقسيم كل عناصر صف الارتكاز على نقطة الارتكاز؛

4- نقوم بوضع صفر في بقية عناصر عمود الارتكاز؛

5- في حالة وجود صفر في عمود الارتكاز، فإننا نبقي كل عناصر الصف الذي فيه الصفر كما هي؛

6- في حالة وجود صفر في صف الارتكاز، فإننا نبقي كل عناصر العمود الذي فيه الصفر كما هي؛

7- في بقية الخانات الأخرى نقوم بالحساب كما يلي

B			C
M			A عنصر الارتكاز

بحيث a, b, c, m تمثل رؤوس مربع أو مستطيل فمكان b نضع $b - \frac{m*c}{a}$

فيتشكل لدينا الجدول الأساسي الثاني

	x_1	x_2	X_3	X_4^e	X_5^e	X_6^e	Bi	bi / xi
X_4^e	$\frac{32}{17}$	0	$\frac{89}{17}$	1	0	$\frac{-2}{17}$	$\frac{120}{17}$	$\frac{15}{4}$ ←
X_5^e	1	0	3	0	1	0	7	7
x_2	$\frac{1}{17}$	1	$\frac{15}{17}$	0	0	1	$\frac{25}{17}$	25
dz	$\frac{25}{17}$	0	$\frac{-118}{17}$	0	0	$\frac{-9}{17}$	$\frac{-225}{17}$	

↑

هذا الجدول ليس أمثل لوجود قيمة موجبة في السطر dz

$$\text{Max } \pi = 2x_1 + 9x_2 + x_3 + 0x_4^e + 0x_5^e + 0x_6^e$$

$$\text{Max } \pi = 2 \times 0 + 9 \times \frac{25}{17} + 0 + 0 \times \frac{120}{17} + 0 \times 7 + 0 \times 0 = \frac{225}{17}$$

	x_1	x_2	X_3	X_4^e	X_5^e	X_6^e	Bi	bi / xi
x_1	1	0	$\frac{89}{32}$	$\frac{17}{32}$	0	$\frac{-1}{16}$	$\frac{15}{4}$	
X_5^e	0	0	$\frac{7}{32}$	$\frac{-17}{32}$	1	$\frac{1}{16}$	$\frac{13}{4}$	
x_2	0	1	$\frac{391}{544}$	$\frac{-1}{32}$	0	$\frac{273}{272}$	$\frac{5}{4}$	
dz	0	0	$-\frac{353}{32}$	$\frac{-25}{32}$	0	$-\frac{7}{16}$	$\frac{-75}{4}$	

$$\text{Max } \pi = 2\,\frac{15}{4} + 9\,\frac{5}{4} + 0 + 0 \times 0 + 0 \times \frac{13}{4} + 0 \times 0$$

$$\text{Max } \pi = \frac{15}{2} + \frac{45}{4} = \frac{30+45}{4} = \frac{75}{4}$$

التمرين رقم 9:

شخص يريد صناعة ورق براك وكسرة فلاحظ أن:

25 كلغ من السميد يشتريها بـ 1000 دج، 5 لترات ماء يشتريها بـ 75دج

وبعد دراسة تحليلية وجد أن الكسرة تستوجب 0.25 كلغ سميد و 0.2 لتر ماء أما ورقة براك فتستوجب 0.05 كلغ سميد و $\frac{1}{15}$ لتر ماء.

مع العلم أن سعر بيع الكسرة 50 دج والورقة 5 دج.

المطلوب: كم كسرة وورقة براك ليربح هذا الشخص أقصى ما يمكن؟

الحل:

تحديد التكلفة الكلية للكسرة

25 كلغ ⟵ 1000 دج

0.25 كلغ ⟵ س دج

س دج $= \frac{0.25 \times 1000}{25}$ = 10 دج

5 لتر ⟵ 75 دج

0.2 لتر ⟵ س دج

س دج = $\frac{0.2 \times 75}{5}$ = 3 دج

التكلفة الكلية للكسرة = 10 + 3 = 13 دج

تحديد التكلفة الكلية لورقة براك

25 كلغ ⟵ 1000 دج

0.05 كلغ ⟵ س دج

س دج = $\frac{0.05 \times 1000}{25}$ = 2 دج

5 لتر ⟵ 75 دج

$\frac{1}{15}$ لتر ⟵ س دج

س دج = $\frac{\frac{1}{15} \times 75}{5}$ = 1 دج

التكلفة الكلية لورقة براك = 2 + 1 = 3 دج

تحديد المتغيرات

x_1 عدد الكسرة المنتجة والمباعة

x_2 عدد ورق البراك المنتجة والمباعة

تحديد دالة الهدف

$\Pi = (50 - 13)\, x_1 + (5 - 3)\, x_2 = 37\, x_1 + 2\, x_2$

تحديد القيود

$0.25\ x_1 + 0.05\ x_2 \leq 25$

$0.2\ x_1 + \frac{1}{15} x_2 \leq 5$

$x_1, x_2 \geq 0$

البحث عن الجدول الأساسي الأول

$0.25\ x_1 + 0.05\ x_2 + x_3^e = 25$

$0.2\ x_1 + \frac{1}{15} x_2 + x_4^e = 5$

$\frac{1}{4} x_1 + \frac{1}{20} x_2 + x_3^e = 25$

$\frac{1}{5} x_1 + \frac{1}{15} x_2 + x_4^e = 5$

$\Pi = 37\ x_1 + 2\ x_2 + 0\ x_3^e + 0\ x_4^e$

	x_1	x_2	X_3^e	X_4^a	Bi	bi / xi
X_3^e	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{20}$	1	0	25	100
X_4^a	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	0	1	5	25
dz	37	2	0	0	0	

هذا الجدول ليس أمثل لوجود قيم موجبة في الصف dz

	x_1	x_2	X_3^e	X_4^a	Bi	bi / xi
X_3^e	0	$-\frac{1}{30}$	1	$-\frac{5}{4}$	$\frac{75}{4}$	
x_1	1	$\frac{1}{3}$	0	5	25	
dz	0	$-\frac{31}{3}$	0	- 185	- 925	

هذا الجدول أمثل لأن كل قيم الصف dz سالبة أو معدومة

$\Pi = 37 \times 25 + 2 \times 0 + 0 \times \frac{75}{4} + 0 \times 0 = 925$

يجب إنتاج وبيع 25 وحدة من الكسرة وعدم إنتاج أي وحدة من ورق براك، مع ملاحظة أنه يبقى $\frac{75}{4}$ كلغ سميد وينتهي الماء، فيتم تحقيق 925 دج كربح.

التمرين رقم 10:

$\text{Max } \pi = 4\ x_1 + 2\ x_2 + 6\ x_3$

$2\ x_1 + 4\ x_2 + 6\ x_3 \leq 30$

$x_1 + x_3 \leq 8$

$4\ x_1 + 8\ x_2 + 2\ x_3 \leq 24$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

$2\ x_1 + 4\ x_2 + 6\ x_3 + x_4^e = 30$

$x_1 + x_3 + x_5^e = 8$

$4\ x_1 + 8\ x_2 + 2\ x_3 + x_6^e = 24$

$x_1, x_2, x_3, x_4^e, x_5^e, x_5^e \geq 0$

$\text{Max } \pi = 4\ x_1 + 2\ x_2 + 6\ x_3 + 0\ x_4^e + 0\ x_5^e + 0\ x_6^e$

	x_1	x_2	x_3	x_4^e	x_5^e	x_6^e	Bi	Bi / xi
x_4^e	2	4	(6)	1	0	0	30	5 ←
X_5^e	1	0	1	0	1	0	8	8
X_6^e	4	8	2	0	0	1	24	12
d z	4	2	6 ↑	0	0	0	0	

هذا الجدول ليس أمثل لوجود قيمة موجبة في السطر dz

	x_1	x_2	x_3	x_4^e	x_5^e	x_6^e	Bi	Bi / xi
X_3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{6}$	0	0	5	15
X_5^e	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{6}$	1	0	3	$\frac{9}{2}$
X_6^e	$\frac{10}{3}$	$\frac{20}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	1	14	$\frac{21}{5}$ ←
d z	2	-2	0	-1	0	0	-30	

↑

$$\text{Max } \pi = 4 \times 0 + 2 \times 0 + 6 \times 5 + 0 \times 0 + 0 \times 3 + 0 \times 14 = 30$$

هذا الجدول ليس أمثل لوجود قيمة موجبة في السطر dz

	x_1	x_2	x_3	x_4^e	x_5^e	X_6^e	Bi	Bi / xi
X_3	0	0	1	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{1}{10}$	$\frac{18}{5}$	
X_5^e	0	-2	0	$-\frac{1}{10}$	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	
X_1	1	2	0	$-\frac{1}{10}$	0	$\frac{3}{10}$	$\frac{21}{5}$	
d z	0	-6	0	$-\frac{4}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{192}{5}$	

هذا الجدول أمثل لأن كل قيم d z سالبة أو معدومة.

$$\text{Max } \pi = 4 \times \frac{21}{5} + 2 \times 0 + 6 \times \frac{18}{5} + 0 \times 0 + 0 \times \frac{1}{5} + 0 \times \frac{1}{5} + 0 \times 0$$

$$\text{Max } \pi = \frac{84}{5} + \frac{108}{5} = \frac{192}{5}$$

على هذه المؤسسة إنتاج وبيع $\frac{21}{5}$ وحدة من x_1 وإنتاج وبيع $\frac{18}{5}$ وحدة من x_3 وعدم إنتاج أي وحدة من x_2 ويبقى $\frac{1}{5}$ كمواد أولية من القيد المتعلق بـ x_5^e حتى تحقق ربح قدره $\frac{192}{5}$ دج.

ثانيا: طريقة حل البرنامج الخطي في حالة تعظيم والقيود ليست حسب الصيغة القانونية

في هذه الحالة يجب القيام بما يلي:

1- علينا أن نطرح من الطرف الأيسر متغيرة الفجوة x^e وإضافة متغيرة اصطناعية x^a والتي تكون معدومة ومعاملها يساوي واحد؛

2- في حالة دالة الهدف في حالة تعظيم، فإننا نضيف متغيرات الفجوة x^e بمعاملات صفرية، أما المتغيرات الاصطناعية x^a فتكون بمعاملات كبيرة جدا وبإشارة سالبة وذلك لكون الدالة في حالة تعظيم أما إذا كانت في حالة تقليل، فإنها تكون بإشارة موجبة ونرمز لمعاملاتها بالحرف m؛

3- نستخرج قيم المتغيرات الاصطناعية x^a من القيود التي فيها أكبر أو يساوي عددا موجبا، ونعوضها في دالة الهدف ونفك الأقواس ونظم الحدود المتشابهة ونضع في السطر الأخير dz المعاملات الجديدة.

ملاحظات:

- الصف الذي فيه يساوي، فإننا نظيف له فقط x^a ولا نطرح منه x^e.
- المتغيرة الاصطناعية x^a ضرورية لأنه من دونها لو كان القيد من الشكل $x_1 + x_2 \geq 20$ فحين تحويلها إلى معادلة $x_1 + x_2 - x_3^e = 20$ وفي الجدول الأساسي الأول $x_1 = x_2 = 0$ ومنه $x_3^e = -20$ وهذا يتعارض مع شرط عدم سالبية المتغيرات. أما إذا كان القيد من الشكل $x_1 + x_2 = 20$ وفي الجدول الأساسي الأول $x_1 = x_2 = 0$ ومنه $20 = 0$ وهذا غير منطقي[1].

التمرين رقم 11:

$$\text{Max } \pi = 2x_1 + 5x_2$$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 20$$

$$4x_1 + 5x_2 = 8$$

$$2x_1 + 6x_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

[1] حسين محمود الجنابي، (2010): الأحدث في بحوث العمليات، دار حامد للنشر والتوزيع: عمان، الأردن، ص ص 75-76.

المطلوب: تحديد الكميات x_1, x_2 ؟

الحل:

نقوم بتحويل المتراجحات إلى معادلات

$3x_1 + 2x_2 - x_3^e + x_4^a = 20$

$4x_1 + 5x_2 + x_5^a = 8$

$2x_1 + 6x_2 + x_6^e = 10$

$\text{Max } \pi = 2x_1 + 5x_2 + 0\, x_3^e - m\, x_4^a - m\, x_5^a + 0\, x_6^e$

$x_4^a = 20 - 3x_1 - 2x_2 + x_3^e$

$x_5^a = 8 - 4x_1 - 5x_2$

$\text{Max } \pi = 2x_1 + 5x_2 + 0\, x_3^e - m\,(20 - 3x_1 - 2x_2 + x_3^e) - m\,(8 - 4x_1 - 5x_2) + 0\, x_6^e$

$\text{Max } \pi = + 5x_2 + 0\, x_3^e - 20\, m + + 2m\, x_2 - m\, x_3^e - 8\, m + 4\, m\, x_1 + + 5\, m\, x_2 + 0\, x_6^e$

$\text{Max } \pi = (2 + 3\, m + 4\, m)\, x_1 + (5 + 5\, m + 2\, m)\, x_2 + (0 - m)\, x_3^e + 0\, x_4^a + 0\, x_5^a + 0\, x_6^e - 20\, m - 8\, m$

$\text{Max } \pi = (2 + 7\, m)\, x_1 + (5 + 7\, m)\, x_2 - m\, x_3^e + 0\, x_4^a + 0\, x_5^a + 0\, x_6^e - 28\, m$

ملاحظة: إذا كان في القيود توجد x^a فتكون هي متغيرة الأساس في الجدول الأول وإن لم توجد فتكون x^e هي متغيرة الأساس في الجدول الأول.

	x_1	x_2	X_3	X_4^a	X_5^a	X_6^e	Bi	bi / xi
X_4^a	3	2	-1	1	0	0	20	10
X_5^a	4	(5)	0	0	1	0	8	$\frac{8}{5}$ ←
X_6^e	2	6	0	0	0	1	10	$\frac{5}{3}$
dz	2 + 7 m	5 + 7 m	- m	0	0	0	28 m	

↑

هذا الجدول ليس أمثل لوجود قيمة موجبة في السطر dz

	x_1	x_2	X_3	X_4^a	X_5^a	X_6^e	Bi	bi / xi
X_4^a	$\frac{9}{5}$	0	-1	1	$\frac{-2}{5}$	0	$\frac{84}{5}$	$\frac{84}{9}$
X_2	$\frac{4}{5}$	1	0	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{8}{5}$	2
X_6^e	$\frac{-14}{5}$	0	0	0	$\frac{-6}{5}$	1	$\frac{2}{5}$	$\frac{-1}{7}$
dz	-2 + $\frac{7}{5}$m	0	- m	0	-1 - $\frac{7}{5}$m	0	-8 + $\frac{84}{5}$m	

Max π = (2 + 7 m) × 0 + (5 + 7 m) $\frac{8}{5}$ - m × 0 + 0 × $\frac{84}{5}$ + 0 × 0 + 0 × $\frac{2}{5}$ - 28 m

Max π = 8 + $\frac{56}{5}$m - 28 m = 8 + $\frac{56-140}{5}$m = 8 - $\frac{84}{5}$m

هذا الجدول ليس أمثل لوجود قيمة موجبة في السطر dz

	x_1	x_2	X_3	X_4^a	X_5^a	X_6^e	Bi
X_4^a	0	$\frac{7}{4}$	-1	1	$\frac{-3}{4}$	0	14
X_1	1	$\frac{5}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	0	2
X_6^e	0	$\frac{7}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	6
dz	0	$\frac{5}{2} - \frac{7}{4}m$	-m	0	$\frac{1}{2} - \frac{121}{20}$m	0	-4 + 14m

في هذا الجدول كل قيم السطر dz سالبة أو معدومة فمن المحتمل أن يكون أمثل، لكن وجود متغيرات اصطناعية ضمن متغيرات الأساس فيكون مستحيل الحل.

Max π = (2 + 7 m) 2 + (5 + 7 m) 0 - m × 0 + 0 × 14 + 0 × 0 + 0 × 6 - 28 m

Max π = 4 + 14 m - 28 m = 4 – 14 m

التمرين رقم 12:

اوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي التالي باستعمال طريقة السمبلكس:

$$\text{Max } \pi = 3\,x_1 + 2\,x_2$$

$$\begin{cases} 4\,x_1 + 2\,x_2 \geq 6 \\ 2\,x_1 + 5\,x_2 = 7 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

الحل:

$$\begin{cases} 4\,x_1 + 2\,x_2 - x_3^{e} + x_4^{a} = 6 \\ 2\,x_1 + 5\,x_2 + x_5^{a} = 7 \end{cases}$$

$$x_4^{a} = 6 - 4\,x_1 - 2\,x_2 + x_3^{e}$$

$$x_5^{a} = 7 - 2\,x_1 - 5\,x_2$$

$$\text{Max } \pi = 3\,x_1 + 2\,x_2 + 0\,x_3^{e} - m\,(6 - 4\,x_1 - 2\,x_2 + x_3^{e}) - m\,(7 - 2\,x_1 - 5\,x_2)$$

$$\text{Max } \pi = 3\,x_1 + 2\,x_2 + 0\,x_3^{e} - 6\,m + 4\,m\,x_1 + 2\,m\,x_2 - m\,x_3^{e} - 7\,m + 2\,m\,x_1 + 5\,m\,x_2$$

$$\text{Max } \pi = (3 + 6\,m)\,x_1 + (2 + 7\,m)\,x_2 - m\,x_3^{e} + 0\,x_4^{a} + 0\,x_5^{a} - 13\,m$$

	x_1	x_2	x_3^{e}	x_4^{a}	x_5^{a}	Bi	Bi / xi
x_4^{a}	4	2	-1	1	0	6	3
x_5^{a}	2	5	0	0	1	7	$\frac{7}{5}$ ←
D z	3 + 6 m	2 + 7 m ↑	- m	0	0	13 m	

هذا الجدول ليس أمثل لوجود قيم موجبة في الصف D z

	x_1	x_2	x_3^e	x_4^a	x_5^a	Bi	Bi / xi
x_4^a	$\frac{16}{5}$	0	-1	1	$\frac{-2}{5}$	$\frac{16}{5}$	1
x_2	$\frac{2}{5}$	1	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{7}{2}$
Dz	$\frac{11}{5}+\frac{16}{5}m$	0	- m	0	$\frac{-2}{5}-\frac{7}{5}m$	$\frac{-14}{5}+\frac{16}{5}m$	

Max π = (3 + 6 m) 0 + (2 + 7 m) $\frac{7}{5}$ - m × 0 + 0 × $\frac{16}{5}$+ 0 × 0 - 13 m

Max π = $\frac{14}{5}+\frac{49}{5}$ m - 13 m = $\frac{14}{5}-\frac{16}{5}m$

هذا الجدول ليس أمثل لوجود قيم موجبة في الصف D z

	x_1	x_2	x_3^e	x_4^a	x_5^a	Bi	Bi / xi
x_1	1	0	$\frac{-5}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{-1}{8}$	1	$\frac{-16}{5}$
x_2	0	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{-1}{8}$	$\frac{1}{4}$	1	8
dz	0	0	$\frac{11}{16}$	$\frac{-11}{16}-m$	$\frac{-1}{8}+m$	- 5	

Max π = (3 + 6 m) x_1 + (2 + 7 m) x_2 - m x_3^e + 0 x_4^a + 0 x_5^a - 13 m

Max π = (3 + 6 m) 1 + (2 + 7 m) 1 - m × 0 + 0 × 0 ^{a} + 0 × 0 - 13 m

Max π = 3 + 6 m + 2 + 7 m - 13 m = 5

هذا الجدول ليس أمثل لوجود قيم موجبة في الصف D z

	x_1	x_2	x_3^e	x_4^a	x_5^a	Bi
x_1	1	$\frac{5}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$
x_3^e	0	8	1	-1	2	8
dz	0	$\frac{-11}{2}$	0	- m	$\frac{-1}{4}-m$	$\frac{-21}{2}$

Max π = (3 + 6 m) x_1 + (2 + 7 m) x_2 - m x_3^e + 0 x_4^a + 0 x_5^a - 13 m

Max π = (3 + 6 m) $\frac{7}{2}$+ (2 + 7 m) × 0 - m × 8 + 0 × 0 + 0 × 0 - 13 m

$\text{Max } \pi = \frac{21}{2} + 21\ m - 8\ m - 13\ m = \frac{21}{2}$

هذا الجدول أمثل لأن كل قيم الصف D z سالبة أو معدومة

التمرين رقم 13:

$\text{Max } \pi = 2\ x_1 + 3\ x_2 + x_3$

$2\ x_1 + 2\ x_2 + x_3 \leq 40$

$5\ x_1 + 2\ x_2 = 35$

$x_1 + 4\ x_2 + x_3 \geq 20$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

الحل:

$2\ x_1 + 2\ x_2 + x_3 + x_4^e = 40$

$5\ x_1 + 2\ x_2 + x_5^a = 35$

$x_1 + 4\ x_2 + x_3 - x_6^e + x_7^a = 20$

$x_1, x_2, x_3, x_4^e, x_5^a, x_6^e, x_7^a \geq 0$

$\text{Max } \pi = 2\ x_1 + 3\ x_2 + x_3 + 0\ x_4^e - m\ x_5^a + 0\ x_6^e - m\ x_7^a$

$x_5^a = 35 - 5\ x_1 - 2\ x_2$

$x_7^a = 20 - x_1 - 4\ x_2 - x_3 + x_6^e$

$\text{Max } \pi = (2 + 6m)\ x_1 + (3 + 6m)\ x_2 + (1 + m)\ x_3 + 0\ x_4^e - 0\ x_5^a - m\ x_6^e + 0\ x_7^a - 55\ m$

	x_1	x_2	x_3	x_4^e	x_5^a	X_6^e	x_7^a	Bi	Bi / xi
x_4^e	2	2	1	1	0	0	0	40	20
X_5^a	5	2	0	0	1	0	0	35	$\frac{35}{2}$
X_7^a	1	4	1	0	0	-1	1	20	5 ←
d z	2 + 6m	3 + 6m	1 + m	0	0	-m	0	55m	

↑

هذا الجدول ليس أمثل لوجود قيمة موجبة في السطر dz

	x_1	x_2	x_3	x_4^e	x_5^a	X_6^e	x_7^a	Bi	Bi / xi
x_4^e	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	30	20
X_5^a	$\frac{9}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	25	$\frac{50}{9}$ ←
X_2	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	5	20
d z	$\frac{5}{4}+\frac{9}{2}$m	0	$\frac{1}{4}-\frac{1}{2}$ m	0	0	$\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\,m$	$-\frac{3}{4}-\frac{3}{2}$m	-15+25m	

↑

Max $\pi = (2 + 6m)\,0 + (3 + 6m)\,5 + (1 + m)\,0 + 0 \times 30 - 0 \times 0 - m \times 0 + 0 \times 0 - 55\,m$

Max $\pi = (3 + 6m)\,5 - 55\,m = 15 - 25\,m$

هذا الجدول ليس أمثل لوجود قيمة موجبة في السطر dz

	x_1	x_2	x_3	x_4^e	x_5^a	X_6^e	x_7^a	Bi	Bi / xi
x_4^e	0	0	$\frac{2}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{65}{3}$	65
X_1	1	0	$-\frac{1}{9}$	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{9}$	$\frac{50}{9}$	50 ←
X_2	0	1	$\frac{5}{18}$	0	$-\frac{1}{18}$	$-\frac{5}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{65}{18}$	-13
d z	0	0	$\frac{7}{18}$	0	$-\frac{5}{18}-m$	$\frac{11}{18}$	$-\frac{17}{36}-\frac{1}{2}$m	$-\frac{395}{18}$	

↑

هذا الجدول ليس أمثل لوجود قيم موجبه في السطر dz

Max $\pi = (2 + 6m)\frac{50}{9} + (3 + 6m)\frac{65}{18} + (1 + m)\,0 + 0 \times \frac{65}{3} - 0 \times 0 - m \times 0 + 0 \times 0 - 55\,m$

Max $\pi = (2 + 6m)\frac{50}{9} + (3 + 6m)\frac{65}{18} - 55\,m$

Max $\pi = \frac{100}{9} + \frac{100}{3}m + \frac{65}{6} + \frac{65}{3}m - 55\,m$

Max $\pi = \frac{200+195}{18} + \frac{100+65}{3}m - 55\,m = \frac{395}{18} + \frac{165}{3}m - 55\,m$

$\text{Max } \pi = \frac{395}{18} + 55\,m - 55\,m = \frac{395}{18}$

	x_1	x_2	x_3	x_4^e	x_5^a	X_6^e	x_7^a	Bi	Bi / xi
x_4^e	- 3	0	1	1	- 1	0	$-\frac{1}{6}$	5	5
X_6^e	9	0	-1	0	2	1	-1	50	-50
X_2	$\frac{5}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{315}{18}$	$+\infty$
d z	$-\frac{11}{2}$	0	1	0	$-\frac{3}{2} - m$	0	$-\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\,m$	$-\frac{315}{6}$	

هذا الجدول ليس أمثل لوجود قيم موجبه في السطر dz

$\text{Max } \pi = (2 + 6m)\,0 + (3 + 6m)\,\frac{315}{18} + (1 + m)\,0 + 0 \times 5 - 0 \times 0 - m \times 50 + 0 \times 0 - 55\,m$

$\text{Max } \pi = (3 + 6m)\,\frac{315}{18} - m \times 50 - 55\,m$

$\text{Max } \pi = \frac{315}{6} + \frac{315}{3}\,m - 50\,m - 55\,m$

$\text{Max } \pi = \frac{315}{6} + 105\,m - 50\,m - 55\,m = \frac{315}{6}$

	x_1	x_2	x_3	x_4^e	x_5^a	X_6^e	x_7^a	Bi	Bi / xi
X_3	-3	0	1	1	-1	0	$-\frac{1}{6}$	5	
X_6^e	6	0	0	1	1	1	$-\frac{7}{6}$	55	
X_2	$\frac{5}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{35}{2}$	
d z	$-\frac{5}{2}$	0	0	0	$-\frac{1}{2} - m$	0	$-\frac{1}{2}\,m$	$-\frac{115}{2}$	

هذا الجدول أمثل لأن كل قيم السطر dz سالبة أو معدومة

$\text{Max } \pi = (2 + 6m)\,0 + (3 + 6m)\,\frac{35}{2} + (1 + m)\,5 + 0 \times 0 - 0 \times 0 - m \times 55 + 0 \times 0 - 55\,m$

$\text{Max } \pi = (3 + 6m)\,\frac{35}{2} + (1 + m)\,5 - m \times 55 - 55\,m$

$$\text{Max } \pi = \frac{105}{2} + 105\text{ m} + 5 + 5\text{ m} - 55\text{ m} - 55\text{ m}$$

$$\text{Max } \pi = \frac{105+10}{2} + 105\text{ m} + 5\text{ m} - 55\text{ m} - 55\text{ m}$$

$$\text{Max } \pi = \frac{115}{2}$$

فيكون من المفروض إنتاج وبيع $\frac{35}{2}$ وحدة من x_2 و 5 وحدات من x_3 مع التأكد من بقاء 55 وحدة من المواد الأولية المتعلقة بـ x_6^e فيتحقق ربح أعظم قدره $\frac{115}{2}$ دج.

ثالثا: طريقة حل البرنامج الخطي في حالة التقليل

نقوم بما يلي:

- نبحث عن الصيغة القانونية، بحيث تكون القيود في حالة أكبر أو يساوي عددا موجبا والتي تتناسب مع إنقاص متغيرة الفجوة x^e بهدف تحقيق المساوات، وبعدها نضيف المتغيرة الاصطناعية x^a وذلك لإيجاد المصفوفة الأحادية؛
- في دالة الهدف كما في التعظيم نضع لكل متغيرة الفجوة x^e معاملا معدوم، أما المتغيرات الاصطناعية x^a فتكون بمعاملات كبيرة موجبة m+؛
- نستخرج قيم المتغيرات الاصطناعية x^a ونعوضها في دالة الهدف ونجمع الحدود المتشابهة، والجزء الغير مرتبط بأي x نغير إشارته ويصبح بمثابة قيمة الدالة في الجدول الأساسي الأول.

ولإعداد الجدول الأساسي الموالي نقوم بما يلي:

1- المتغيرة التي تدخل الأساس هي التي لها أصغر معامل سالب في الدالة الاقتصادية أي الذي لديه أكبر قيمة مطلقة وإشارته سالبة، وعمودها هو عمود الارتكاز؛

2- المتغيرة التي تخرج من الأساس هي المقابلة لأصغر قيمة موجبة في العمود bi / xi؛

3- نقسم عناصر صف الارتكاز على عنصر الارتكاز؛

4- جميع عناصر عمود الارتكاز نجعلها صفرية؛

5- حينما يكون صفر في عمود الارتكاز فإن الصف الذي فيه الصفر يبقى كما هو، و حينما يكون صفر في صف الارتكاز فإن العمود الذي فيه الصفر يبقى كما هو؛

6- بقية العناصر تحسب بطريقة المربعات؛

7- الحل الأمثل يكون لما جميع عناصر الصف dz موجبة أو معدومة؛

8- عناصر عمود المتغيرة الاصطناعية x^a التي تخرج من الأساس لا يتم حسابها من جديد، فعلينا شطبه في الجدول الموالي.

التمرين رقم 14:

$\min c = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3$

$2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 8$

$x_1 + 6x_2 + 3x_4 \geq 12$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

المطلوب: تحديد الكميات x_1, x_2, x_3, x_4؟

نقوم بتحويل المتراجحات إلى معادلات

$2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5^e + x_6^a = 8$

$x_1 + 6x_2 + 3x_4 - x_7^e + x_8^a = 12$

$\min c = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 0x_4 + 0\, x_5^e + m\, x_6^a + 0\, x_7^e + m\, x_8^a$

$x_6^a = 8 - 2x_1 - 4x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5^e$

$x_8^a = 12 - x_1 - 6x_2 - 3x_4 + x_7^e$

$\min c = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 0x_4 + 0\, x_5^e + m\,(8 - 2x_1 - 4x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5^e) + 0\, x_7^e + m\,(12 - x_1 - 6x_2 - 3x_4 + x_7^e)$

$\min c = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 0x_4 + 0\, x_5^e + 8m - 2m\, x_1 - 4m\, x_2 - m\, x_3 - 2m\, x_4 + m\, x_5^e + 0\, x_7^e + 12m - m x_1 - 6m\, x_2 - 3m\, x_4 + m\, x_7^e$

$\min c = x_1\,(4 - 2m - m) + x_2\,(3 - 4m - 6m) + x_3\,(2 - m) + x_4\,(-2m - 3m) + m\, x_5^e + m\, x_5^e + 0\, x_6^a + m\, x_7^e + + 0\, x_8^a + 20m$

$\min c = x_1\,(4 - 3m) + x_2\,(3 - 10m) + x_3\,(2 - m) + x_4\,(-5m) + m\, x_5^e + 0\, x_6^a + m\, x_7^e + 0\, x_8^a + 20m$

	x_1	x_2	X_3	X_4	X_5^e	X_6^a	X_7^e	X_8^a	Bi	bi / xi
X_6^a	2	4	1	2	-1	1	0	0	8	2
X_8^a	1	(6)	0	3	0	0	-1	1	12	2 ←
dz	4 - 3m	3-10m	2-m	- 5 m	M	0	m	0	-20m	

هذا الجدول ليس أمثل لوجود قيمة سالبة في السطر dz

	x_1	x_2	X_3	X_4	X_5^e	X_6^a	X_7^e	X_8^a	Bi	bi / xi
X_6^a	$\frac{4}{3}$	0	1	0	1-	1	$\frac{2}{3}$	/	ε	ε
x_2	$\frac{1}{6}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{6}$	/	2	12
dz	$\frac{7}{2} - \frac{4}{3} m$	0	2-m	$-\frac{3}{2}$	M	0	$\frac{1}{2} - \frac{2}{3} m$	/	-6	

$\min c = 0\,(4 - 3m) + 2\,(3 - 10m) + 0\,(2 - m) + 0\,(-5m) + m \times 0 + 0 \times 0 + m \times 0 + 0 \times 0 + 20m$

$\min c = 6 - 20m + 20m = 6$

هذا الجدول ليس أمثل لوجود قيمة سالبة في السطر dz

	x_1	x_2	X_3	X_4	X_5^e	X_6^a	X_7^e	X_8^a	Bi	bi / xi
x_1	1	0	$\frac{3}{4}$	0	$-\frac{3}{4}$	/	$\frac{1}{2}$	/	E	$+\infty$
x_2	0	1	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	/	$-\frac{1}{4}$	/	2	4
dz	0	0	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{21}{8}$	/	$-\frac{11}{6}$	/	-6	

$\min c = 0\,(4 - 3m) + 2\,(3 - 10m) + 0\,(2 - m) + 0\,(-5m) + m \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 0 + 20m$

$\min c = 6 - 20m + 20m = 6$

هذا الجدول ليس أمثل لوجود قيمة سالبة في السطر dz

	x_1	x_2	X_3	X_4	X_5^e	X_6^a	X_7^e	X_8^a	Bi	bi / xi
x_1	1	0	$\frac{3}{4}$	0	$-\frac{3}{4}$	/	$\frac{1}{2}$	/	E	ε
X_4	0	2	$-\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	/	$-\frac{1}{2}$	/	4	- 8
dz	0	3	$-\frac{3}{8}$	0	3	/	$-\frac{31}{12}$	/	0	

$$\min c = 0\,(4-3m) + 0\,(3-10m) + 0\,(2-m) + 4\,(-5m) + m\,x_5^e + 0\,x_6^a + m\,x_7^e + 0\,x_8^a + 20m$$

$$\min c = -20m + 20m = 0$$

هذا الجدول ليس أمثل لوجود قيمة سالبة في السطر dz

	x_1	x_2	X_3	X_4	X_5^e	X_6^a	X_7^e	X_8^a	Bi	bi / xi
X_7^e	2	0	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	/	1	/	E	$-\varepsilon$
X_4	1	2	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$	/	0	/	4	$-\frac{8}{3}$
dz	$\frac{31}{6}$	3	$\frac{7}{2}$	0	$-\frac{7}{8}$	/	0	/	0	

$$\min c = 0\,(4-3m) + 0\,(3-10m) + 0\,(2-m) + 4\,(-5m) + m \times 0 + 0 \times 0 + m \times 0 + 0 \times 0 + 20m$$

$$\min c = -20m + 20m = 0$$

هذا الجدول ليس أمثل لوجود قيمة سالبة في السطر dz، و كل قيم عمود الارتكاز سالبة فتكون دالة الهدف غير منتهية، مما يؤدي إلى كل قيم العمود bi / xi سالبة فلا يمكن تحديد صف الارتكاز وهذا الحل هو فاسد الأصل لوجود صفر في عمود الارتكاز في جدول سابق ولم نخرج منها.

التمرين رقم 15:

$$\min c = 3x_1 + 6x_2 + 2x_3$$

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 6$$

$$4x_1 + 2x_3 \geq 16$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4^e + x_5^a = 6$$

$$4x_1 + 2x_3 - x_6^e + x_7^a = 16$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4^e, x_5^a, x_6^e, x_7^a \geq 0$$

$$\min c = 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 0\,x_4^e + m\,x_5^a + 0\,x_6^e + m\,x_7^a$$

$x_5^a = 6 - 2x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4^e$

$x_7^a = 16 - 4x_1 - 2x_3 + x_6^e$

$\min c = (3 - 6m)x_1 + (6 - 4m)x_2 + (2 - 3m)x_3 + m x_4^e + 0 x_5^a + m x_6^e + 0 x_7^a + 22m$

	x_1	x_2	x_3	x_4^e	x_5^a	X_6^e	x_7^a	Bi	Bi / xi
X_5^a	(2)	4	1	-1	1	0	0	6	3 ←
X_7^a	4	0	2	0	0	-1	1	16	4
d z	3 – 6m	6- 4m	2- 3m	M	0	M	0	-22m	

↑ هذا الجدول ليس أمثل لوجود قيمة سالبة في السطر dz

	x_1	x_2	x_3	x_4^e	x_5^a	X_6^e	x_7^a	Bi	Bi / xi
X_1	1	2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	/	0	0	3	−6
X_7^a	0	-8	0	(2)	/	-1	1	4	2 ←
d z	0	8 m	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$- 2m	/	M	0	-9 -4m	

↑

هذا الجدول ليس أمثل لوجود قيمة سالبة في السطر dz

$\min c = (3 - 6m)\,3 + (6 - 4m)\,0 + (2 - 3m)\,0 + m \times 0 + 0 \times 0 + m \times 0 + 0 \times 4 + 22m$

$\min c = (3 - 6m)\,3 + 22m = 9 - 18m + 22m$

$\min c = 9 + 4m$

	x_1	x_2	x_3	x_4^e	x_5^a	X_6^e	x_7^a	Bi	Bi / xi
X_1	1	0	$\frac{1}{2}$	0	/	$-\frac{1}{4}$	/	4	
x_4^e	0	- 4	0	1	/	$-\frac{1}{2}$	/	2	
d z	0	6	$\frac{1}{2}$	0	/	$2m + \frac{3}{4}$	/	-12	

هذا الجدول أمثل لأن كل قيم السطر dz موجبة أو معدومة.

$\min c = (3 - 6m)\ 4 + (6 - 4\ m)\ 0 + (2 - 3m)\ 0 + m \times 2 + 0 \times 0 + m \times 0 + 0 \times 4 + 22\ m$

$\min c = (3 - 6m)\ 4 + 2m + 22\ m = 12 - 24\ m + 2m + 22\ m$

$\min c = 12$

من خلال النتائج السابقة يجب إنتاج وبيع 4 وحدات من x_1 فقط مع بقاء 2 وحدات كمواد أولية المتعلقة بـ x_4^e حتى يتم تقليل التكلفة إلى الحد الأدنى وقدره 12 دج.

التمرين رقم 16:

$$\text{Min } z = 2\ x_1 + 4\ x_2 + 3\ x_3$$

$$2\ x_1 + 2\ x_2 + x_3 \leq 450$$

$$x_1 + 4\ x_2 + 2\ x_3 \geq 600$$

$$x_1 + 2\ x_2 + 2\ x_3 = 500$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

الحل:

$$\text{Min } z = 2\ x_1 + 4\ x_2 + 3\ x_3 + 0\ x_4^e + 0\ x_5^e + m\ x_6^a + m\ x_7^a$$

$$2\ x_1 + 2\ x_2 + x_3 + x_4^e = 450$$

$$x_1 + 4\ x_2 + 2\ x_3 - x_5^e + x_6^a = 600$$

$$x_1 + 2\ x_2 + 2\ x_3 + x_7^a = 500$$

$x_1, x_2, x_3, x_4^e, x_5^e, x_6^a, x_7^a \geq 0$

$x_6^a = 600 - x_1 - 4x_2 - 2x_3 + x_5^e$

$x_7^a = 500 - x_1 - 2x_2 - 2x_3$

$\text{Min } z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 0x_4^e + 0x_5^e + m(600 - x_1 - 4x_2 - 2x_3 + x_5^e) + m(500 - x_1 - 2x_2 - 2x_3)$

$\text{Min } z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 0x_4^e + 0x_5^e + 600m - mx_1 - 4mx_2 - 2mx_3 + mx_5^e + 500m - mx_1 - 2mx_2 - 2mx_3$

$\text{Min } z = (2 - 2m)x_1 + (4 - 6m)x_2 + (3 - 4m)x_3 + 0x_4^e + mx_5^e + 0x_6^a + 0x_7^a + 1100m$

	x_1	x_2	X_3	X_4^e	X_5^e	X_6^a	X_7^a	bi	bi / xi
X_4^e	2	2	1	1	0	0	0	450	225
X_6^a	1	(4)	2	0	-1	1	0	600	150 ←
X_7^a	1	2	2	0	0	0	1	500	250
dz	2 -2 m	4 – 6 m	3 – 4m	0	M	0	0	- 1100 m	

↑

هذا الجدول ليس أمثل لوجود قيم سالبة في الصف dz

	x_1	x_2	X_3	X_4^e	X_5^e	X_6^a	X_7^a	bi	bi / xi
X_4^e	$\frac{3}{2}$	0	0	1	$\frac{1}{2}$	/	0	150	$+\infty$
x_2	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	/	0	150	300
X_7^a	$\frac{1}{2}$	0	(1)	0	$\frac{1}{2}$	/	1	200	200 ←
dz	$1 - \frac{1}{2}m$	0	1 – m	0	$1 - \frac{1}{2}m$	/	0	-600 - 200 m	

↑

هذا الجدول ليس أمثل لوجود قيم سالبة في الصف dz

Min z = (2 – 2 m) 0 + (4 – 6 m) 150 + (3 – 4 m) 0 + 0 × 150 + m × 0 + 0 × 0 + 0 × 0 + 1100 m

Min z = (4 – 6 m) 150 + 1100 m = 600 + 200m

	x_1	x_2	X_3	X_4^e	X_5^e	X_6^a	X_7^a	bi	bi / xi
X_4^e	$\frac{3}{2}$	0	0	1	$\frac{1}{2}$	/	/	150	
x_2	0	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	/	/	50	
X_3	$\frac{1}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	/	/	200	
dz	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	/	/	- 800	

هذا الجدول أمثل لأن كل قيم الصف dz سالبة أو معدومة

Min z = (2 – 2 m) 0 + (4 – 6 m) 50 + (3 – 4 m) 200 + 0 × 0 + m × 0 + 0 × 0 + 0 × 0 + 1100 m

Min z = (4 – 6 m) 50 + (3 – 4 m) 200 + 1100 m

Min z = 200 – 300 m + 600 – 800 m + 1100 m

Min z = 800

على هذا الشخص إنتاج وبيع 50 وحدة من x_2 و200 من x_3 وذلك لتقليل التكلفة إلى 800 دج.

رابعا: الحالات الخاصة في حل البرنامج الخطي باستخدام طريقة السمبلاكس

1- حالة الحل المستحيل:

إذا لاحظنا في حل أساسي أن جميع معاملات الصف dz أقل أو يساوي صفر في حالة تعظيم أو أكبر يساوي صفر في حالة التقليل مع وجود متغيرة اصطناعية x^a ضمن متغيرات الأساس فيكون هذا الحل ليس أمثل بل مستحيل الحل.

2- دالة الهدف غير منتهية:

إذا لحضنا في حل أساسي أن جميع معاملات عمود الارتكاز سالبة أو معدومة فهذا يدل أن دالة الهدف غير منتهية.

3- حالة فساد الأصل:

إذا كان في حل أساسي أن قيمة bi معدومة فهذا يجعلنا في حالة فساد الأصل، فعلينا أن نعوض القيمة المعدومة بـ $\in$ وهو عددا افتراضيا موجب صغير جدا، حيث يكون هو يمثل أصغر قيمة موجبة، ونكمل الحل بإعتبار أن صفها هو صف الارتكاز، فإذا وصلنا إلى حل أمثل فنقول أن هذا الحل فاسد الأصل ويمكن الخروج من حالة فساد الأصل إذا كان العنصر الموجود في عمود الارتكاز المقابل لـ $\in$ معدوما أو سالبا لأن $\frac{\in}{0} = +\infty$ و $\frac{+\infty}{-a} = -\in$ وفي كلتا الحالاتان الصف الذي وضعنا فيه $\in$ لا يكون هو صف الارتكاز.

4- حالة عدم توفر شرط عدم سالبية المتغيرات

4-1 إذا كان أحد المتغيرات أقل أو يساوي الصفر، فعلينا إجراء تعديل على البرنامج وذلك بافتراض $x_i^/$ بحيث $x_i^/ = -x_i$ ومنه يكون $x_i^/ \leq 0$، ونبحث عن الحل بشكل عادي وذلك بتعويض $x_i^/$ في دالة الهدف وكذلك في القيود بدلا عن x_i وفي الأخير حين الوصول إلى الحل الأمثل نعيد $x_i^/$ إلى أصله x_i.

4-2 إذا كان أحد المتغيرات حرا، ففي هذه الحالة يتم تعديل البرنامج بحيث $x_j = x_j^/ - x_j^{//}$ وبعدها يتم تعويض المتغيرات وفق التحويل الجديد في البرنامج الأصلي، ونبحث عن الحل الأمثل وفي الأخير نحدد قيمة المتغير الأصلي.

التمرين رقم 17:

$\text{Max } \pi = 10\ x_1 + 6\ x_2$

$8\ x_1 + 10\ x_2 \leq 4000$

$4\ x_1 + 2x_2 \geq 2000$

$6\ x_1 + 8x_2 \geq 3200$

$x_1, x_2 \geq 0$

الحل:

$8\ x_1 + 10\ x_2 + x_3^e = 4000$

$4\ x_1 + 2x_2 - x_4^e + x_5^a = 2000$

$6\ x_1 + 8x_2 - x_6^e + x_7^a = 3200$

$x_1, x_2, x_3^e, x_4^e, x_5^a, x_6^e, x_7^a \geq 0$

$x_5^a = 2000 - 4\ x_1 - 2x_2 + x_4^e$

$x_7^a = 3200 - 4\ x_1 - 2x_2 + x_6^e$

$\text{Max } \pi = 10\ x_1 + 6\ x_2 + 0\ x_3^e + 0\ x_4^e - m\ x_5^a + 0\ x_6^e - m\ x_7^a$

$\text{Max } \pi = 10\ x_1 + 6\ x_2 + 0\ x_3^e + 0\ x_4^e - m\ (2000 - 4\ x_1 - 2x_2 + x_4^e) + 0\ x_6^e - m\ (3200 - 6\ x_1 - 8x_2 + x_6^e)$

$\text{Max } \pi = (10 + 10\ m)\ x_1 + (6 + 10\ m)\ x_2 + 0\ x_3^e - m\ x_4^e + 0\ x_5^a - m\ x_6^e + 0\ x_7^a - 5200\ m$

	x_1	x_2	X_3^e	X_4^e	X_5^a	X_6^e	X_7^a	bi	bi / xi
X_3^e	8	10	1	0	0	0	0	4000	
X_5^a	4	2	0	- 1	1	0	0	2000	←
X_7^a	6	8	0	0	0	- 1	1	3200	
dz	10 + 10 m	6 + 10 m	0	- m	0	- m	0	5200 m	

↑

هذا الجدول ليس أمثل لوجود قيم موجبة في الصف dz

	x_1	x_2	X_3^e	X_4^e	X_5^a	X_6^e	X_7^a	bi	bi / xi
X_1	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{8}$	0	0	0	0	500	
X_5^a	0	- 3	$\frac{-1}{2}$	- 1	1	0	0	0	
X_7^a	0	$\frac{-3}{2}$	$\frac{-3}{4}$	0	0	- 1	1	200	
dz	0	$\frac{-13}{2} - \frac{-3}{2}$ m	$\frac{-5}{4} - \frac{5}{4}$ m	- m	0	- m	0	- 5000 + 200 m	

بما أن كل قيم الصف dz سالبة أو معدومة فمن المحتمل أن يكون الحل امثل، لكن عند ملاحظة متغيرات الأساس نلاحظ وجود متغيرة اصطناعية x^a ومنه هذا الجدول ليس امثل والبرنامج مستحيل الحل.

التمرين رقم 18:

$\text{Max } \pi = 4\ x_1 + 2\ x_2$

$x_1 + 4\ x_2 \geq 1000$

$3\ x_1 + x_2 \geq 1200$

$x_1 \leq 700$

$x_1, x_2 \geq 0$

الحل:

$x_1 + 4x_2 - x_3^e + x_4^a = 1000$

$3\ x_1 + x_2 - x_5^e + x_6^a = 1200$

$x_1 + x_7^e = 700$

$x_1, x_2, x_3^e, x_4^a, x_5^e, x_6^a, x_7^e \geq 0$

$x_4^a = 2000 - x_1 - 4x_2 + x_3^e$

$x_6^a = 1200 - 3\ x_1 - x_2 + x_3^e$

$\text{Max } \pi = 4\ x_1 + 2\ x_2 + 0\ x_3^e - m\ x_4^a + 0\ x_5^e - m\ x_6^a + 0\ x_7^e$

$\text{Max } \pi = 4\ x_1 + 2\ x_2 + 0\ x_3^e - m\ (1000 - x_1 - 4x_2 + x_3^e) + 0\ x_5^e - m\ (1200 - 3\ x_1 - x_2 + x_3^e) + 0\ x_7^e$

Max $\pi = (4 + 4\,m)\,x_1 + (2 + 5\,m)\,x_2 - m\,x_3^e + 0\,x_4^a - m\,x_5^e + 0\,x_6^a + 0\,x_7^e - 2200\,m$

	x_1	x_2	X_3^e	X_4^a	X_5^e	X_6^a	X_7^e	bi	bi / xi
X_4^a	1	4	- 1	1	0	0	0	1000	250 ←
X_6^a	3	1	0	0	- 1	1	0	1200	1200
X_7^e	1	0	0	0	0	0	1	700	$+\infty$
dz	4 + 4 m	2 + 5 m	- m	0	- m	0	0	2200 m	

↑

هذا الجدول ليس أمثل لوجود قيم موجبة في الصف dz

	x_1	x_2	X_3^e	X_4^a	X_5^e	X_6^a	X_7^e	Bi	bi / xi
X_2	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{-1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	250	1000
X_6^a	$\frac{11}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{-1}{4}$	- 1	1	0	950	$\frac{3800}{11}$ ←
X_7^e	1	0	0	0	0	0	1	700	700
dz	$\frac{7}{2} + \frac{11}{4}$ m	0	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ m	$\frac{-1}{2} - \frac{5}{4}$ m	- m	0	0	950 m - 500	

↑

هذا الجدول ليس أمثل لوجود قيم موجبة في الصف dz

	x_1	x_2	X_3^e	X_4^a	X_5^e	X_6^a	X_7^e	bi	bi / xi
X_2	0	1	$\frac{-3}{11}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{-1}{11}$	0	$\frac{1800}{11}$	1800
x_1	1	0	$\frac{1}{11}$	$\frac{-1}{11}$	$\frac{-4}{11}$	$\frac{4}{11}$	0	$\frac{3800}{11}$	- 950
X_7^e	0	0	$\frac{-1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{-4}{11}$	1	$\frac{3900}{11}$	950 ←
dz	0	0	$\frac{2}{11}$	$\frac{-9}{2} - \frac{3}{2}$ m	$\frac{14}{11}$	$\frac{-14}{11} - M$	0	$\frac{-18800}{11}$	

↑

هذا الجدول ليس أمثل لوجود قيم موجبة في الصف dz

	x_1	x_2	X_3^e	X_4^a	X_5^e	X_6^a	X_7^e	bi	bi / xi
X_2	0	1	$\frac{-1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{-1}{4}$	$\frac{825}{11}$	$-\frac{3300}{11}$
x_1	1	0	0	$\frac{-2}{11}$	0	0	1	$\frac{7700}{11}$	$+\infty$
X_5^e	0	0	$\frac{-1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	- 1	$\frac{11}{4}$	950	- 3800
dz	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{-53}{11} - \frac{3}{2}$ m	0	$-M$	$\frac{-7}{2}$	$\frac{-20750}{11}$	

هذا الجدول ليس أمثل لوجود قيم موجبة في الصف dz

بما أن جميع عناصر عمود الارتكاز سالبة أو معدومة و من المعروف أن جميع عناصر bi تكون موجبة ومنه كل قيم bi / xi سالبة أو غير منتهية فلا يمكن تحديد صف الارتكاز فلا يمكن إكمال الحل ونكون في حالة دالة غير منتهية.

التمرين رقم 19:

$\text{Max } \pi = 5\ x_1 + 6\ x_2$

$5\ x_1 + 2\ x_2 \leq 2000$

$3\ x_1 + 8\ x_2 \leq 6000$

$x_1 + 2\ x_2 \geq 1500$

$x_1, x_2 \geq 0$

الحل:

$5\ x_1 + 2\ x_2 + x_3^e = 2000$

$3\ x_1 + 8\ x_2 + x_4^e = 6000$

$x_1 + 2\ x_2 - x_5^e + x_6^a = 1500$

$x_1, x_2, x_3^e, x_4^e, x_5^e, x_6^a \geq 0$

$x_6^a = 1500 - 4\ x_1 - 6\ x_2 + x_5^e$

$\text{Max } \pi = 5\ x_1 + 6\ x_2 + 0\ x_3^e + 0\ x_4^e + 0\ x_5^e - m\ x_6^a$

$\text{Max } \pi = 5\ x_1 + 6\ x_2 + 0\ x_3^e + 0\ x_4^e + 0\ x_5^e - m\ (1500 - x_1 - 2\ x_2 + x_5^e)$

$\text{Max } \pi = (5 + m)\ x_1 + (6 + 2\ m)\ x_2 + 0\ x_3^e + 0\ x_4^e - m\ x_5^e + 0\ x_6^a - 1500\ m$

	x_1	x_2	x_3^e	x_4^e	x_5^e	x_6^a	bi	bi / xi
x_3^e	5	2	1	0	0	0	2000	1000
X_4^e	3	8	0	1	0	0	6000	750
x_6^a	1	2	0	0	- 1	1	1500	750
dz	5+ m	6+ 2 m	0	0	- m	0	1500 m	

هذا الجدول ليس أمثل لوجود قيم موجبة في الصف dz

	x_1	x_2	x_3^e	x_4^e	x_5^e	x_6^a	bi	bi / xi
x_3^e	$\frac{17}{4}$	0	1	$\frac{-1}{4}$	0	0	500	$\frac{2000}{17}$
x_2	$\frac{3}{8}$	1	0	$\frac{1}{8}$	0	0	750	2000
x_6^a	$\frac{-3}{4}$	0	0	$\frac{-1}{4}$	- 1	1	$\in$	$-\in$
dz	$\frac{11}{4}+\frac{1}{4}$ m	0	0	$\frac{-3}{4}-\frac{1}{4}$ m	- m	0	4500	

هذا الجدول ليس أمثل لوجود قيم موجبة في الصف dz

يوجد صفر في العمود bi فنكون قد دخلنا في حالة فساد الأصل ، فيجب تعويض الصفر بابسلون وإكمال الحل وبما أن القيمة في عمود الارتكاز المقابلة لـ $\in$ هي سالبة فنكون قد حرجنا من حالة فساد الأصل وصف الارتكاز ليس الصف الذي فيه $\in$.

	x_1	x_2	x_3^e	x_4^e	x_5^e	x_6^a	bi	bi / xi
X_1	1	0	$\frac{4}{17}$	$\frac{-1}{17}$	0	0	$\frac{2000}{17}$	
x_2	0	1	$\frac{-3}{34}$	$\frac{5}{24}$	0	0	$\frac{12000}{17}$	
x_6^a	0	0	$\frac{3}{17}$	$\frac{-5}{34}$	- 1	1	$\frac{2000}{17}$	
dz	0	0	$\frac{-11}{17} - \frac{1}{17}$ m	$\frac{-10}{17} - \frac{4}{17}$ m	- m	0	$\frac{71000}{17} - \frac{500}{17}$ m	

بما أن كل قيم الصف dz سالبة أو معدومة ولكم يوجد متغيرة اصطناعية ضمن متغيرات الاساس فإن هذا البرنامج مستحيل الحل مع التذكير بأننا دخلنا حالة فساد الأصل و خرجنا منها.

التمرين رقم 20:

$$\text{Max } \pi = 4x_1 + 8x_2 + x_3$$

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 30$$

$$6x_1 + 4x_2 - x_3 \leq 15$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \ \forall \ x_3$$

المطلوب: تحديد الكميات x_1, x_2, x_3 ؟

نفرض $x_3 = x_3^{/} - x_3^{//}$

نقوم بتحويل المتراجحات إلى معادلات

$$x_1 + 2x_2 + 4 (x_3^{/} - x_3^{//}) + x_4^e = 30$$

$$6x_1 + 4x_2 - (x_3^{/} - x_3^{//}) + x_5^a = 15$$

$$\text{Max } \pi = 4x_1 + 8x_2 + (x_3^{/} - x_3^{//}) + 0\ x_4^e + 0\ x_5^e$$

ومنه

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3^{/} - 4\ x_3^{//} + x_4^e = 30$$

$$6x_1 + 4x_2 - x_3^{/} + x_3^{//} + x_5^a = 15$$

$$\text{Max } \pi = 4x_1 + 8x_2 + x_3^{/} - x_3^{//} + 0\,x_4^{e} + 0\,x_5^{e}$$

	x_1	x_2	$X_3^{/}$	$X_3^{//}$	X_4^{e}	X_5^{e}	Bi	bi / xi
X_4^{e}	1	2	4	-4	1	0	30	15
X_5^{e}	6	4	-1	1	0	1	14	$\frac{15}{4}$ ←
dz	4	8 ↑	1	-1	0	0	0	

هذا الجدول ليس أمثل لوجود قيمة موجبة في السطر dz

	x_1	x_2	$X_3^{/}$	$X_3^{//}$	X_4^{e}	X_5^{e}	Bi	bi / xi
X_4^{e}	-2	0	$\frac{9}{2}$	$-\frac{9}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{45}{2}$	5 ←
X_2	$\frac{3}{2}$	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{15}{4}$	-15
dz	-8	0	3 ↑	-3	0	-2	-30	

هذا الجدول ليس أمثل لوجود قيمة موجبة في السطر dz

$$\text{Max } \pi = 4 \times 0 + 8\ \frac{15}{4} + 0 - 0 + 0 \times \frac{45}{2} + 0 \times 0$$

$$\text{Max } \pi = 8\ \frac{15}{4} + = 30$$

	x_1	x_2	$X_3^{/}$	$X_3^{//}$	X_4^{e}	X_5^{e}	Bi	bi / xi
$X_3^{/}$	$-\frac{4}{9}$	0	1	-1	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{9}$	5	
X_2	$\frac{25}{18}$	1	0	0	$\frac{1}{18}$	$\frac{2}{9}$	5	
dz	$-\frac{20}{3}$	0	0	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{3}$	-45	

هذا الجدول أمثل لأن كل قيم السطر dz سالبة أو معدومة

$$\text{Max } \pi = 4 \times 0 + 8 \times 5 + 5 - 0 + 0 \times 0 + 0 \times 0$$

$$\text{Max } \pi = 40 + 5 = 45$$

فعلينا إنتاج 5 وحدات من x_2 ولا ننتج أي وحدة من x_1 و بما أن $x_3 = x_3^{/} - x_3^{//}$ فإن

$x_3 = 5 - 0 = 5$ فعلينا إنتاج 5 وحدات من x_3 وذلك لتحقيق ربح قدره 45.

التمرين رقم 21:

$$\min c = 3 x_1 + 4 x_2$$

$$2 x_1 + 6 x_2 \geq 12$$

$$5 x_1 + 4 x_2 \geq 20$$

$$x_1, \geq 0, \quad x_2 \leq 0$$

الحل:

نفرض $x_2^{/}$ بحيث $x_2 = - x_2^{/}$ ومنه يكون النموذج كما يلي:

$$\min c = 3 x_1 - 4 x_2^{/}$$

$$2 x_1 - 6 x_2^{/} \geq 12$$

$$5 x_1 - 4 x_2^{/} \geq 20$$

$$x_1, x_2^{/} \geq 0$$

$$2 x_1 - 6 x_2^{/} - x_3^{e} + x_4^{a} = 12$$

$$5 x_1 - 4 x_2^{/} - x_5^{e} + x_6^{a} = 20$$

$$x_1, x_2^{/}, x_3^{e}, x_4^{a}, x_5^{e}, x_6^{a} \geq 0$$

$$\min c = 3 x_1 - 4 x_2^{/} + 0 x_3^{e} + m x_4^{a} + 0 x_5^{e} + m x_6^{a}$$

$$x_4^{a} = 12 - 2x_1 + 6 x_2^{/} + x_3^{e}$$

$$x_6^{a} = 20 - 5 x_1 + 24 x_2 + x_6^{e}$$

$$\min c = (3 - 7m) x_1 + (- 4 + 10 m) x_2^{/} + m x_3^{e} + 0 x_4^{a} + m x_5^{e} + 0 x_6^{a} + 32 m$$

	x_1	$x_2^{/}$	X_3^e	X_4^a	X_5^e	X_6^a	bi	Bi / xi
X_4^a	2	- 6	-1	1	0	0	12	6
X_6^a	5	- 4	0	0	-1	1	20	4 ←
d z	3 - 7m ↑	- 4 + 10 m	m	0	m	0	- 32 m	

هذا الجدول ليس أمثل لوجود قيمة سالبة في السطر dz

	x_1	$x_2^{/}$	X_3^e	X_4^a	X_5^e	X_6^a	bi	Bi / xi
X_4^a	0	$-\frac{22}{5}$	-1	1	$\frac{2}{5}$	/	4	10 ←
X_1	1	$-\frac{4}{5}$	0	0	$-\frac{1}{5}$	/	4	- 20
d z	0	$-\frac{8}{5}+\frac{22}{5}$ m	m	0	$\frac{3}{5}-\frac{2}{5}$ m ↑	/	- 12- 4 m	

هذا الجدول ليس أمثل لوجود قيمة سالبة في السطر dz

$$\min c = (3 - 7m)\ 4 + (-4 + 10\ m)\ 0 + m \times 0 + 0 \times 4 + m \times 0 + 0 \times 0 + 32\ m$$

$$\min c = (3 - 7m)\ 4 + 32\ m = 12 - 28\ m + 32\ m = 12 + 4\ m$$

	x_1	$x_2^{/}$	X_3^e	X_4^a	X_5^e	X_6^a	bi	Bi / xi
X_5^e	0	- 11	$-\frac{5}{2}$	/	1	/	10	
X_1	1	- 3	$-\frac{1}{2}$	/	0	/	6	
d z	0	5	$\frac{3}{2}$	/	0	/	- 18	

هذا الجدول أمثل لأن كل قيم السطر dz موجبة أو معدومة.

$$\min c = (3 - 7m)\ 6 + (-4 + 10\ m)\ 0 + m \times 0 + 0 \times 0 + m \times 10 + 0 \times 0 + 32\ m$$

$\min c = (3 - 7m)\ 6 + m \times 10 + 32\ m = 18 - 42\ m + 10\ m - 32\ m$

$\min c = 18$

$x_2 = - x_2^{/} = - (0) = 0$

من خلال النتائج السابقة يجب إنتاج وبيع 6 وحدات من x_1 وعدم إنتاج أي وحدة من x_2 مع ملاحظة بقاء 10 وحدات كمواد أولية المتعلقة بـ x_5^e حتى يتم تقليل التكلفة إلى الحد الأدنى وقدره 18 دج.

الفصل الثالث: المسألة الثنائية (النموذج المقابل)

لكل صيغة للبرمجة الخطية والتي تسمى بالنموذج الأولي، هناك نموذج مقابل والذي يتم اللجوء إليه لتقليل من الجداول حتى الوصول إلى الحل الأمثل وخاصة في حالة عدد القيود في البرنامج الأولي أكبر من عدد المتغيرات. فهناك العلاقة بين المشكلة الأصلية والمشكلة الثنائية، حيث إذا كانت المشكلة الأصلية تهدف لتحديد المزيج الأمثل السلعي والذي يحقق أقصى ربح وذلك عند الاستغلال الأفضل للموارد والطاقات المستخدمة في الإنتاج، فإن المشكلة الثنائية تتعلق بتحديد تكلفة إنتاج أو سعر شراء الوحدة الواحدة من الموارد المتاح استخدامها، وكذلك لقياس نسبة مساهمة كل مورد من المواد المستخدمة في الإنتاج في تحقيق العائد من كل منتج[1]. وللاعتماد على النموذج المقابل هناك العديد من المتغيرات يجب القيام بها وهي:

1- نقلب صيغة دالة الهدف في البرنامج المقابل من max إلى min ومن min إلى max
2- البرنامج الأصلي يجب أن يكون في الصيغة القانونية حتى يمكن اللجوء إلى النموذج المقابل، بحيث في التعظيم تكون القيود في حالة أصغر أو يساوي وفي التقليل تكون القيود في حالة أكبر أو يساوي وفي أي حالة مخالفة لذلك، فإننا نضرب طرفي المتراجحه في (-1) ونقلب اتجاهها، ونقبل بأن الطرف الثاني ليس عدد موجبا[2]، لكن يجب أن يكون ثابتا، مع ملاحظة أن في حالة قيد فيه (=) فإنه يتم قسمتها إلى متراجحتان واحدة فيها ($\leq$) والأخرى فيها ($\geq$) والقيد المعاكس لدالة الهدف نضرب طرفيه في (-1) فيتم تغيير اتجاه المتراجحة. وعدد القيود في النموذج المقابل يساوي دائما عدد المتغيرات الأساسية في النموذج الأولي[3].
3- في النموذج المقابل يتم تغيير اتجاه المتراجحة.
4- عمود الثوابت bi في البرنامج الأولي يتحول إلى معاملات متغيرات دالة الهدف في البرنامج المقابل.
5- لتحديد معاملات القيود للبرنامج المقابل، فإننا نشكل مصفوفة البرنامج الأولي ونقلبها بحيث الصف الأول يتحول إلى العمود الأول والصف الثاني يتحول إلى العمود الثاني ...إلخ مع المحافظة على الترتيب.

---

[1] حسن محمود الجنابي، المصدر نفسه، ص 157.

[2] دلال صادق الجواد وحميد ناصر الفتال، المصدر سبق ذكره، ص 105.

[3] عبد الرسول عبد الرزاق الموسوي، (2009): المدخل إلى بحوث العمليات الطبعة الثالثة، دار وائل للنشر: عمان، الأردن، ص 71.

6- معاملات دالة الهدف في البرنامج الأولي تتحول إلى ثوابت القيود في البرنامج المقابل بنفس الترتيب.

7- في الحل الأمثل للبرنامج المقابل، فإن المتغيرات تكون لها علاقة بمتغيرات الحل الأمثل للبرنامج الأولي بحيث متغيرات الفجوة لكل برنامج تساوي المتغيرات الأساسية للبرنامج الأخر وذلك بقيم مطلقة مع مراعاة الترتيب.

8- قيمة الدالة والتي تكون بالقيمة المطلقة، فإنها في البرنامجين تكون متساوية.

ملاحظات:

- المشاكل التي تواجه استخدام النموذج المقابل، وهي تتمثل فيما يلي:[1]

1- حالة عدم تناسق دالة الهدف مع علاقات القيود: عندما يتم السعي لتعظيم دالة الهدف وفي نفس الوقت تكون القيود في حالة أكبر أو يساوي أو يتم تقليل دالة الهدف وفي نفس الوقت تكون القيود في حالة أصغر أو يساوي، فيمكن تجاوز هذه المشكلة من خلال ضرب دالة الهدف في (-1) فيتحول التعظيم إلى التقليل أو التقليل إلى التعظيم.

2- عندما تمتزج اتجاهات القيود في نموذج واحد فيتم ضرب القيود التي لا تتناسب مع دالة الهدف في (-1).

- لما يكون في البرنامج العادي القيد في حالة يساوي فإن المتغير المتعلق به في النموذج المقابل يكون غير محدد الإشارة، وإذا كان المتغير غير محدد الإشارة فيكون القيد المتعلق به في النموذج المقابل في حالة يساوي[2]. وبعبارة أخرى إذا تم الانتقال من النموذج الأولي إلى المقابل دون تقسيم القيد الذي فيه يساوي إلى معادلتان، فإن المتغيرة y التي تقابل المعادلة التي فيه يساوي تكون حرة تنتمي

[1] سليمان محمد مرجان، (2002): بحوث العمليات، الجامعة المفتوحة، الطبعة الأولى: طرابلس، ليبيا، ص ص 108-110.

[2] حمدي طه، أحمد حسين على حسين ومحمد على محمد أحمد، (2011): مقدمة في بحوث العمليات، دار المريخ للنشر: الرياض، السعودية، ص 105.

(∞ − ، + ∞) والقيود تكون حسب الصيغة القانونية بما يتوافق مع دالة الهدف في النموذج المقابل[1].

التمرين رقم 22:

$$\text{Max } \pi = 10\, x_1 + 4x_2 + 2x_3$$

$$2x_1 + 4x_2 + 6\, x_3 \geq 10$$

$$4x_1 + 7x_2 \leq 15$$

$$x_1 + 3\, x_3 = 4$$

$$6x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 20$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

الحل:

تحويل دالة الهدف من التعظيم إلى التقليل، ثم جعل كل القيود في الصيغة القانونية من الشكل ≤

$$-2x_1 - 4x_2 - 6\, x_3 \leq -10$$

$$4x_1 + 7x_2 \leq 15$$

$$x_1 + 3\, x_3 \leq 4$$

$$-x_1 - 3\, x_3 \leq -4$$

$$6x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 20$$

الطرف الثاني للمتراجحات يمثل معاملات دالة الهدف للبرنامج المقابل

$$\text{Min} = -10y_1 + 15y_2 + 4y_3 - 4y_4 + 20y_5$$

[1] أحمد محمد الهزاع الصمادي، (2008): أساسيات بحوث العمليات، دار قنديل للنشر والتوزيع، الطبعة الأولى: عمان، الأردن، ص 106.

نشكل المصفوفة الأصلية

$$\begin{vmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 4 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 6 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

ثم نقوم بقلب المصفوفة

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 & -1 & 6 \\ -4 & 7 & 0 & 0 & 4 \\ -6 & 0 & 3 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

من هذه المصفوفة نشكل قيود النموذج المقابل وذلك بمراعاة عكس اتجاه المتراجحات، والطرف الثاني هو معاملات دالة الهدف في البرنامج الأولي

$$-2y_1 + 4y_2 + y_3 - y_4 + 6y_5 \geq 10$$

$$-4y_1 + 7y_2 + 4y_5 \geq 4$$

$$-6y_1 + 3y_3 - 3y_4 + y_5 \geq 2$$

ثم نقوم بالحل كما تعودنا سابقا

$$-2y_1 + 4y_2 + y_3 - y_4 + 6y_5 - y_6^e + y_7^a = 10$$

$$-4y_1 + 7y_2 + 4y_5 - y_8^e + y_9^a = 4$$

$$-6y_1 + 3y_3 - 3y_4 + y_5 - y_{10}^e + y_{11}^a = 2$$

$$\text{Min} = -10y_1 + 15y_2 + 4y_3 - 4y_4 + 20y_5 + 0y_6^e + my_7^a + 0y_8^e + my_9^a + 0y_{10}^e + my_{11}^a$$

نستخرج y^a من كل قيد ونعوضها في دالة الهدف الجديدة

$$y_7^a = 10 + 2y_1 - 4y_2 - y_3 + y_4 - 6y_5 + y_6^e$$

$y_9^a = 4 + 4y_1 - 7y_2 - 4y_5 + y_8^e$

$y_{11}^a = 2 + 6y_1 - 3y_3 + 3y_4 - y_5 + y_{10}^e$

$Min = -10y_1 + 15y_2 + 4y_3 - 4y_4 + 20y_5 + 0y_6^e + m(10 + 2y_1 - 4y_2 - y_3 + y_4 - 6y_5 + y_6^e) + 0y_8^e + m(4 + 4y_1 - 7y_2 - 4y_5 + y_8^e) + 0y_{10}^e + m(2 + 6y_1 - 3y_3 + 3y_4 - y_5 + y_{10}^e)$

$Min = -10y_1 + 15y_2 + 4y_3 - 4y_4 + 20y_5 + 0y_6^e + 10m + 2my_1 - 4my_2 - my_3 + my_4 - 6my_5 + my_6^e + 0y_8^e + 4m + 4my_1 - 7my_2 - 4my_5 + my_8^e + 0y_{10}^e + 2m + 6my_1 - 3my_3 + 3my_4 - my_5 + m y_{10}^e$

$Min = (-10 + 12m)y_1 + (15 - 11m)y_2 + (4 - 4m)y_3 + (-4 + 4m)y_4 + (20 - 11m)y_5 + my_6^e + 0y_7^a + my_8^e + 0y_9^a + my_{10}^e + 0y_{11}^a + 16m$

	y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6^e	Y_7^a	Y_8^e	Y_9^a	Y_{10}^e	y_{11}^a	bi	bi / yi
Y_7^a	-2	4	1	-1	6	-1	1	0	0	0	0	10	$\frac{10}{4}$
Y_9^a	-4	7	0	0	4	0	0	-1	1	0	0	4	$\frac{4}{7}$ ←
y_{11}^a	-6	0	3	-3	1	0	0	0	0	-1	1	2	$+\infty$
Dz	-10 +12m	15 - 11m	4 - 4m	4 +4m	20 - 11m	m	0	m	0	m	0	-16 m	

↑ هذا الجدول ليس أمثل لوجود قيم سالبه في السطر dz

	y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6^e	Y_7^a	Y_8^e	Y_9^a	Y_{10}^e	y_{11}^a	Bi	bi / yi
Y_7^a	$\frac{2}{7}$	0	1	-1	$\frac{26}{7}$	-1	6	$\frac{4}{7}$	/	0	0	$\frac{54}{7}$	$\frac{27}{13}$
Y_2	$-\frac{4}{7}$	1	0	0	$\frac{4}{7}$	0	0	$-\frac{1}{7}$	/	0	0	$\frac{4}{7}$	1 ←
y_{11}^a	-6	0	3	-3	1	0	0	0	/	-1	1	2	2
Dz	$-\frac{4}{7} + \frac{40}{7}m$	0	4 - 4m	4 +4m	$\frac{80}{7} - \frac{33}{7}m$	m	0	$\frac{15}{7} - \frac{4}{7}m$	/	m	0	$-\frac{60}{7} - \frac{68}{7}m$	

↑ هذا الجدول ليس أمثل لوجود قيم سالبه في السطر dz

Min = (-10 +12m) 0 + (15 -11m) $\frac{4}{7}$ +(4 -4m) 0 +(-4 +4m) 0 +(20 -11m) 0 + m × 0 + 0 × $\frac{54}{7}$ + m× 0 + 0× 0 + m× 0 + 0× 2 + 16 m

Min = (15 -11 m) $\frac{4}{7}$ + 9 m = $\frac{60}{7}$ - $\frac{44}{7}$ m + 16 m

Min = $\frac{60}{7} + \frac{68}{7}$ m

	y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6^e	Y_7^a	Y_8^e	Y_9^a	Y_{10}^e	y_{11}^a	Bi	bi / yi
Y_7^a	4	$\frac{13}{2}$	1	-1	0	-1	6	$\frac{3}{2}$	/	0	0	4	4
Y_5	-1	$\frac{7}{4}$	0	0	1	0	0	$-\frac{1}{4}$	/	0	0	1	+ ∞
y_{11}^a	- 5	$-\frac{7}{4}$	3	-3	0	0	0	$\frac{1}{4}$	/	-1	1	1	$\frac{1}{3}$ ←
Dz	10 +m	-20 + $\frac{33}{4}$ m	4 - 4m	4 +4m	0	m	0	5 - $\frac{7}{4}$ m	/	m	0	-20 - 5 m	

↑

هذا الجدول ليس أمثل لوجود قيم سالبه في السطر dz

Min = (-10 +12m) 0 + (15 -11m) 0 +(4 -4m) 0 +(-4 +4m) 0 +(20 -11m) 1 + m × 0 + 0 × (4) + m× 0 + 0× 0 + m× 0 + 0× 1 + 16 m

Min = (20 -11m) 1 + 16 m = 20 + 5 m

	y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6^e	Y_7^a	Y_8^e	Y_9^a	Y_{10}^e	y_{11}^a	Bi	bi / yi
Y_7^a	$\frac{17}{3}$	$\frac{85}{12}$	0	0	0	-1	6	$\frac{17}{12}$	/	$\frac{1}{3}$	/	$\frac{11}{3}$	$\frac{11}{17}$ ←
Y_5	- 1	$\frac{7}{4}$	0	0	1	0	0	$\frac{1}{4}$	/	0	/	1	- 1
Y_3	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{7}{12}$	1	-1	0	0	0	$\frac{1}{12}$	/	$-\frac{1}{3}$	/	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{5}$
Dz	$\frac{50}{3} - \frac{17}{3}$ m	$-\frac{53}{3} + \frac{71}{12}$ m	0	8	0	m	0	$\frac{14}{3} - \frac{17}{12}$ m	/	$\frac{4}{3} - \frac{1}{3}$ m	/	$-\frac{64}{3} - \frac{11}{3}$ m	

↑

هذا الجدول ليس أمثل لوجود قيم سالبه في السطر dz

Min = (-10 +12m) 0 + (15 -11m) 0 +(4 -4m) $\frac{1}{3}$ +(-4 +4m) 0 +(20 -11m) 1 + m × 0 +

0 × $\frac{11}{3}$ + m× 0 + 0× 0 + m× 0 + 0× 1 + 16 m

Min = (4 -4m) $\frac{1}{3}$ +(20 -11m) 1 + 9 m = $\frac{4}{3}$ +20 - $\frac{4}{3}$ m -11 m + 16 m

Min = $\frac{64}{3}$ + $\frac{11}{3}$ m

	y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6^e	Y_7^a	Y_8^e	Y_9^a	Y_{10}^e	y_{11}^a	bi	bi / yi
y_1	1	$\frac{5}{4}$	0	0	0	$-\frac{3}{17}$	/	$\frac{1}{4}$	/	$\frac{1}{17}$	/	$\frac{11}{17}$	
Y_5	0	3	0	0	1	$-\frac{3}{17}$	/	$\frac{1}{2}$	/	$\frac{1}{17}$	/	$\frac{28}{17}$	
Y_3	0	$\frac{3}{2}$	1	-1	0	$-\frac{5}{17}$	/	$\frac{1}{2}$	/	$-\frac{4}{17}$	/	$\frac{24}{17}$	
Dz	0	$-\frac{231}{6}$ + 13 m	0	8	0	$\frac{50}{17}$	/	$\frac{1}{2}$	/	$\frac{6}{17}$	/	$-\frac{546}{17}$	

هذا الجدول أمثل لأن كل قيم الصف dz موجبة أو معدومة

Min = (-10 +12m) $\frac{11}{17}$ + (15 -11m) 0 +(4 -4m) $\frac{24}{17}$ +(-4 +4m) 0 +(20 -11m) $\frac{28}{17}$ + m × 0 +

0 × 0 + m× 0 + 0× 0 + m× 0 + 0× 1 + 16 m

Min = (-10 +12m) $\frac{11}{17}$ +(4 -4m) $\frac{24}{17}$ + (20 -11m) $\frac{28}{17}$ + 16 m

Min = - $\frac{110}{17}$ + $\frac{132}{17}$ m + $\frac{96}{17}$ - $\frac{96}{17}$ m + $\frac{560}{17}$ - $\frac{308}{17}$ m + 16 m

Min = $\frac{96+560-110}{17}$ + $\frac{132+272-96-308}{17}$ m

Min = $\frac{546}{17}$

التمرين رقم 23: هذا البرنامج الخطي توصلنا إلى حله الأمثل باستعمال البرنامج الأولي للاسمبلاكس، فيطلب الآن حله باستعمال البرنامج المقابل والمقارنة بين الحلين:

$\text{Max } \pi = 2x_1 + 9x_2 + x_3$

$2x_1 + 2x_2 + 7x_3 \leq 10$

$x_1 + 3x_3 \leq 7$

$x_1 + 17x_2 + 15x_3 \leq 25$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

الحل الأمثل

	x_1	x_2	X_3	X_4^e	X_5^e	X_6^e	Bi	bi / xi
x_1	1	0	$\frac{89}{32}$	$\frac{17}{32}$	0	$\frac{-1}{16}$	$\frac{15}{4}$	
X_5^e	0	0	$\frac{7}{32}$	$\frac{-17}{32}$	1	$\frac{1}{16}$	$\frac{13}{4}$	
x_2	0	1	$\frac{391}{544}$	$\frac{-1}{32}$	0	$\frac{273}{272}$	$\frac{5}{4}$	
dz	0	0	$-\frac{353}{32}$	$\frac{-25}{32}$	0	$-\frac{7}{16}$	$\frac{-75}{4}$	

الحل:

$\text{Min } = 10y_1 + 7y_2 + 25y_3$

$2y_1 + y_2 + y_3 \geq 2$

$2y_1 + 17y_3 \geq 9$

$7y_1 + 3y_2 + 15y_3 \geq 1$

ثم نقوم بالحل كما تعودنا سابقا

$2y_1 + y_2 + y_3 - y_4^e + y_5^a = 2$

$2y_1 + 17y_3 - y_6^e + y_7^a = 9$

$7y_1 + 3y_2 + 15\ y_3 - y_8^e + y_9^a = 1$

$Min = 10y_1 + 7\ y_2 + 25\ y_3 + 0y_4^e + my_5^a + 0y_6^e + my_7^a + 0y_8^e + my_9^a$

نستخرج y^a من كل قيد ونعوضها في دالة الهدف الجديدة

$y_5^a = 2 - 2y_1 - y_2 - y_3 + y_4^e$

$y_7^a = 9 - 2y_1 - 17\ y_3 + y_6^e$

$Y_9^a = 1 - 7y_1 - 3y_2 - 15\ y_3 + y_8^e$

$Min = Min = 10y_1 + 7\ y_2 + 25\ y_3 + 0\ y_4^e + m\ (2 - 2y_1 - y_2 - y_3 + y_4^e) + 0y_6^e + m\ (9 - 2y_1 - 17\ y_3 + y_6^e) + 0y_8^e + m\ (1 - 7y_1 - 3y_2 - 15\ y_3 + y_8^e)$

$Min = (10 - 11\ m)y_1 + (7 - 4m)\ y_2 + (25 - 33\ m)\ y_3 + my_4^e + 0\ y_5^a + my_6^e + 0y_7^a + my_8^e + 0y_9^a + 12\ m$

	y_1	Y_2	Y_3	Y_4^e	Y_5^a	Y_6^e	Y_7^a	Y_8^e	Y_9^a	Bi	bi / yi
Y_5^a	2	1	1	-1	1	0	0	0	0	2	2
Y_7^a	2	0	17	0	0	-1	1	0	0	9	$\frac{9}{17}$
Y_9^a	7	3	15	0	0	0	0	-1	1	1	$\frac{1}{15}$ ←
Dz	10 - 11 m	7 – 4m	25 – 33 m	m	0	m	0	m	0	- 12m	

↑

هذا الجدول ليس أمثل لوجود قيم سالبه في السطر dz

	y_1	Y_2	Y_3	Y_4^e	Y_5^a	Y_6^e	Y_7^a	Y_8^e	Y_9^a	Bi	bi / yi
Y_5^a	$\frac{23}{15}$	$\frac{4}{5}$	0	-1	1	0	0	$\frac{1}{15}$	/	$\frac{29}{15}$	29
Y_7^a	$-\frac{89}{15}$	$-\frac{51}{15}$	0	0	0	-1	1	$\frac{17}{15}$	/	$\frac{18}{15}$	$\frac{18}{17}$ ←
Y_3	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{5}$	1	0	0	0	0	$-\frac{1}{15}$	/	$\frac{1}{15}$	-1
Dz	$-\frac{5}{3} + \frac{23}{15}m$	$2 + \frac{13}{5}m$	0	m	0	m	0	$\frac{5}{3} - \frac{6}{5}m$	/	$-\frac{5}{3} - \frac{49}{5}m$	

↑

هذا الجدول ليس أمثل لوجود قيم سالبه في السطر dz

	y_1	Y_2	Y_3	Y_4^e	Y_5^a	Y_6^e	Y_7^a	Y_8^e	Y_9^a	Bi	bi / yi
Y_5^a	$\frac{32}{17}$	1	0	-1	1	$\frac{1}{17}$	/	0	/	$\frac{25}{17}$	$\frac{25}{32}$
Y_8^a	$-\frac{89}{17}$	-3	0	0	0	$-\frac{15}{17}$	/	1	/	$\frac{118}{17}$	$-\frac{118}{89}$
Y_3	$\frac{2}{17}$	0	1	0	0	$-\frac{1}{17}$	/	0	/	$\frac{9}{17}$	$\frac{9}{2}$
Dz	$\frac{120}{17} - \frac{32}{17}$ m	7 - m	0	m	0	$\frac{25}{17}$	/	0	/	$-\frac{225}{17} - \frac{25}{17}$ m	

هذا الجدول ليس أمثل لوجود قيم سالبه في السطر dz

	y_1	Y_2	Y_3	Y_4^e	Y_5^a	Y_6^e	Y_7^a	Y_8^e	Y_9^a	Bi	bi / yi
Y_1	1	$\frac{17}{32}$	0	$-\frac{17}{32}$	/	$\frac{1}{32}$	/	0	/	$\frac{25}{32}$	
Y_8^e	0	$-\frac{7}{32}$	0	$-\frac{89}{32}$	/	$-\frac{23}{32}$	/	1	/	$\frac{353}{32}$	
Y_3	0	$-\frac{1}{16}$	1	$\frac{1}{16}$	/	$-\frac{1}{16}$	/	0	/	$\frac{7}{16}$	
Dz	0	$\frac{13}{4}$	0	$\frac{15}{4}$	/	$\frac{5}{4}$	/	0	/	$-\frac{75}{4}$	

هذا الجدول أمثل لأن كل قيم السطر dz موجبة أو معدومة

فنستنتج قيم المتغيرات الحقيقية والفجوة وقيمة الدالة التي تكون بقيمة مطلقة بحيث قيمة كل واحدة بالمقابل لها في bi وان لم تكن ضمن متغيرات الأساس فقيمتها هي صفر كما يلي:

y_1	Y_2	Y_3	Y_4^e	Y_6^e	Y_8^e	Dz
25/32	0	7/16	0	0	353/32	75/4

ويمكن استنتاج قيم المتغيرات الحقيقية والفجوة في النموذج الأولي من خلال القيم المقابلة لكل متغيرة في الصف dz في النموذج المقابل وذلك بقيمة مطلقة مع إجراء تحويل قيمة كل متغيرة حقيقية إلى قيمة متغيرة فجوة مع مراعاة الترتيب وكذلك قيمة كل متغيرة فجوة إلى قيمة متغيرة حقيقية مع مراعاة الترتيب، وذلك بحذف المتغيرات الاصطناعية التي تكون خارج الأساس حتى يكون الحل أمثل.

y_1	Y_2	Y_3	Y_4^e	Y_6^e	Y_8^e	dz
X_4^e	X_5^e	X_6^e	X_1	X_2	X_3	dz
0	$\frac{13}{4}$	0	$\frac{15}{4}$	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{75}{4}$

	x_1	x_2	X_3	X_4^e	X_5^e	X_6^e	Bi	bi / xi
x_1	1	0	$\frac{89}{32}$	$\frac{17}{32}$	0	$\frac{-1}{16}$	$\frac{15}{4}$	
X_5^e	0	0	$\frac{7}{32}$	$\frac{-17}{32}$	1	$\frac{1}{16}$	$\frac{13}{4}$	
x_2	0	1	$\frac{391}{544}$	$\frac{-1}{32}$	0	$\frac{273}{272}$	$\frac{5}{4}$	
Dz	0	0	$-\frac{353}{32}$	$\frac{-25}{32}$	0	$-\frac{7}{16}$	$-\frac{75}{4}$	

الجدول الأمثل للسمبلاكس الأولي

من هذا الجدول الأمثل للسمبلاكس الأولي نجد ما يلي:

x_1	x_2	X_3	X_4^e	X_5^e	X_6^e	dz
$\frac{15}{4}$	$\frac{5}{4}$	0	0	$\frac{13}{4}$	0	$\frac{75}{4}$

وهذا ينسجم مع ما تم استنتاجه من الحل الأمثل للنموذج المقابل.

بنفس الطريقة يمكن تحديد قيم المتغيرات في الحل الأمثل للنموذج الأولي من الحل الأمثل للنموذج المقابل بنفس الطريقة.

x_1	x_2	X_3	X_4^e	X_5^e	X_6^e	Bi
Y_4^e	Y_5^e	Y_6^e	Y_1	Y_2	Y_3	dz
0	0	$/- \frac{353}{32}/$	$/ \frac{-25}{32} /$	0	$/- \frac{7}{16}/$	$\frac{75}{4}$

وهذه القيم هي المستنتجة سابقا.

فنستنتج أنه بين النموذجين هناك علاقة تكافؤ منطقي بين الموجود في Bi في النموذج الأول والمستنتج من الصف dz في النموذج الأخر.

التمرين رقم 24:

$\text{Max } \pi = 10\ x_1 + 4x_2$

$1x_1 + 2x_2 \leq 3$

$2x_1 + 4x_2 \leq 6$

$-2\ x_1 - 4\ x_2 \leq -6$

$-4\ x_1 - 8\ x_2 \leq -12$

$x_1, x_2 \geq 0$

الحل باستعمال النموذج المقابل:

المصفوفة المقلوبة

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & -4 \\ 2 & 4 & -4 & -8 \end{vmatrix}$$

$$\text{Min} = 3\ y_1 + 6\ y_2 - 6\ y_3 - 12\ y_4$$

$$1y_1 + 2\ y_2 - 2\ y_3 - 4\ y_4 \geq 10$$

$$2y_1 + 4\ y_2 - 4\ y_3 - 8\ y_4 \geq 4$$

ثم نقوم بالحل كما تعودنا سابقا

$$\text{Min} = 3\ y_1 + 6\ y_2 - 6\ y_3 - 12\ y_4 + 0\ y_5^e + m\ y_6^a + 0\ y_7^e + m\ y_8^a$$

$$1y_1 + 2\ y_2 - 2\ y_3 - 4\ y_4 - y_5^e + y_6^a = 10$$

$$2y_1 + 4\ y_2 - 4\ y_3 - 8\ y_4 - y_7^e + y_8^a = 4$$

نستخرج y^a من كل قيد ونعوضها في دالة الهدف الجديدة

$$Y_6^a = 10 - y_1 - 2\ y_2 + 2\ y_3 - 4\ y_4 + y_5^e$$

$$Y_8^a = 4 - 2\ y_1 - 4\ y_2 + 4\ y_3 - 8\ y_4 + y_6^e$$

$$\text{Min} = 3\ y_1 + 6\ y_2 - 6\ y_3 - 12\ y_4 + 0\ y_5^e + m\ (10 - y_1 - 2\ y_2 + 2\ y_3 - 4\ y_4 + y_5^e) + 0y_6^e + m\ (4 - 2\ y_1 - 4\ y_2 + 4\ y_3 - 8\ y_4 + y_6^e)$$

$$\text{Min} = (3 - 3\ m)y_1 + (6 - 6m)\ y_2 + (-6 + 6\ m)\ y_3 + (-12 + 12\ m)\ y_4 + my_5^e + 0\ y_6^a + my_7^e + 0y_8^a + 14\ m$$

	y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5^e	Y_6^a	Y_7^e	Y_8^a	bi	bi / yi
Y_6^a	1	2	- 2	-4	- 1	1	0	0	10	5
Y_8^a	2	4	- 4	8	0	0	-1	1	4	1 ←
Dz	3 - 3 m	6 – 6m	- 6 + 6 m	- 12 + 12 m	m	0	m	0	- 14m	

↑

هذا الجدول ليس أمثل لوجود قيم سالبه في السطر dz

	y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5^e	Y_6^a	Y_7^e	Y_8^a	bi	bi / yi
Y_6^a	0	0	0	0	- 1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	8	16 ←
Y_2	$\frac{1}{2}$	1	- 1	- 2	0	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	- 4
Dz	0	0	0	0	m	0	$\frac{3}{2} - \frac{1}{2}m$	$-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}m$	- 6 -8 m	

↑

هذا الجدول ليس أمثل لوجود قيم سالبه في السطر dz

	y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5^e	Y_6^a	Y_7^e	Y_8^a	bi	bi / yi
Y_7^e	0	0	0	0	- 2	2	1	- 1	16	
Y_2	$\frac{1}{2}$	1	- 1	- 2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	5	
Dz	0	0	0	0	3	0	0	m	- 30	

Min = $(3 - 3m)y_1 + (6 - 6m)\, y_2 + (- 6 + 6m)\, y_3 + (- 12 + 12m)\, y_4 + my_5^e + 0\, y_6^a + my_7^e + 0y_8^a + 14m$

Min = $(3 - 3m)\, 0 + (6 - 6m)\, 5 + (- 6 + 6m)\, 0 + (- 12 + 12m)\, 0 + 0m + 0\, y_6^a + 16m + 0y_8^a + 14m = 30 - 30m + 16m + 14m = 30$

هذا الجدول أمثل لأن كل قيم السطر dz موجبة أو معدومة، فنستنتج قيم المتغيرات الحقيقية والفجوة وقيمة الدالة التي تكون بقيمة مطلقة بحيث قيمة كل واحدة بالمقابل لها في bi وان لم تكن ضمن متغيرات الأساس فقيمتها هي صفر كما يلي:

ويمكن استنتاج قيم المتغيرات الحقيقية والفجوة في النموذج الأولي من خلال القيم المقابلة لكل متغيرة في الصف dz في النموذج المقابل وذلك بقيمة مطلقة مع إجراء تحويل قيمة كل متغيرة حقيقية إلى قيمة متغيرة فجوة مع مراعاة الترتيب وكذلك قيمة كل متغيرة فجوة إلى قيمة متغيرة حقيقية مع مراعاة الترتيب، وذلك بحذف المتغيرات الاصطناعية التي تكون خارج الأساس حتى يكون الحل أمثل.

التمرين رقم 25:

المطلوب: حل هذا البرنامج بالاعتماد على النموذج الأولي ثم على النموذج المقابل

$$\text{Max } \pi = x_1 + x_2$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 3$$

$$2x_1 + 4x_2 = 6$$

$$4x_1 + 8x_2 \geq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

الحل بالاعتماد على النموذج الأولي:

نقوم بتحويل المتراجحات إلى معادلات وذلك بعد تقسيم القيد الثاني إلى معادلتين واحدة اكبر أو يساوي والأخرى اصغر أو يساوي

$$x_1 + 2x_2 + x_3^e = 3$$

$$2x_1 + 4x_2 + x_4^e = 6$$

$$2x_1 + 4x_2 - x_5^e + x_6^a = 6$$

$$4x_1 + 8x_2 - x_7^e + x_8^a = 12$$

$$\text{Max } \pi = x_1 + x_2 + 0\, x_3^e + 0\, x_4^e + 0\, x_5^e - m\, x_6^a + 0\, x_7^e - m\, x_8^a$$

$X_6^a = 6 - 2x_1 - 4x_2 + x_5^e$

$X_8^a = 12 - 4x_1 - 8x_2 + x_7^e$

$Max\ \pi = x_1 + x_2 + 0\ x_3^e + 0\ x_4^e + 0\ x_5^e - m\ (6 - 2x_1 - 4x_2 + x_5^e) + 0\ x_7^e - m\ (12 - 4x_1 - 8x_2 + x_7^e)$

$Max\ \pi = (1 + 2m + 4m)\ x_1 + (1 + 4m + 8m)\ x_2 + 0\ x_3^e + 0\ x_4^e - m\ x_5^a + 0\ x_6^a - m\ x_7^e + 0\ x_6^a - 6m - 12m$

$Max\ \pi = (1 + 6m)\ x_1 + (1 + 12m)\ x_2 + 0\ x_3^e + 0\ x_4^e - m\ x_5^a + 0\ x_6^a - m\ x_7^e + 0\ x_6^a - 18m$

	x_1	x_2	X_3^e	X_4^e	X_5^e	X_6^a	X_7^e	X_8^a	Bi	bi / xi
X_3^e	1	2	1	0	0	0	0	0	3	$\frac{3}{2}$
X_4^e	2	4	0	1	0	0	0	0	6	$\frac{3}{2}$
X_6^a	2	4	0	0	- 1	1	0	0	6	$\frac{3}{2}$
X_8^a	4	8	0	0	0	0	- 1	1	12	$\frac{3}{2}$ ←
Dz	1 + 6 m	1+ 12 m	0	0	- m	0	- m	0	18 m	

↑

هذا الجدول ليس أمثل لوجود قيمة موجبة في السطر dz

	x_1	x_2	X_3^e	X_4^e	X_5^e	X_6^a	X_7^e	X_8^a	Bi	bi / xi
X_3^e	0	0	1	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	£	£
X_4^e	0	0	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	£	£
X_6^a	0	0	0	0	- 1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	£	£ ←
X_2	$\frac{1}{2}$	1	0	0	0	0	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{2}$	- 12
Dz	$\frac{1}{2}$	0	0	0	- m	0	$\frac{1}{8} + \frac{1}{2}m$	$-\frac{1}{8} - \frac{3}{2}m$	$-\frac{3}{2}$	

↑

هذا الجدول ليس أمثل لوجود قيمة موجبة في السطر dz

	x_1	x_2	X_3^e	X_4^e	X_5^e	X_6^a	X_7^e	X_8^a	Bi	bi / xi
X_3^e	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	£	$+\infty$
X_4^e	0	0	0	1	1	- 1	0	0	£	$+\infty$
X_7^e	0	0	0	0	- 2	2	1	1	£	$+\infty$
X_2	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	3
Dz	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}-$ m	0	$-\frac{1}{4}-2$ m	$-\frac{3}{2}$	

هذا الجدول ليس أمثل لوجود قيم موجبة في السطر dz

	x_1	x_2	X_3^e	X_4^e	X_5^e	X_6^a	X_7^e	X_8^a	Bi	bi / xi
X_3^e	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	£	$+\infty$
X_4^e	0	0	0	1	1	- 1	0	0	£	$+\infty$
X_7^e	0	0	0	0	- 2	2	1	1	£	$-\infty$
X_1	1	2	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	3	- 6
Dz	0	- 1	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}-$ m	0	$-\frac{1}{2}-2$ m	- 3	

هذا الجدول ليس أمثل لوجود قيمة موجبة في السطر dz

	x_1	x_2	X_3^e	X_4^e	X_5^e	X_6^a	X_7^e	X_8^a	Bi	bi / xi
X_3^e	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	
X_5^e	0	0	0	1	1	- 1	0	0	0	
X_7^e	0	0	0	2	0	0	1	1	0	
X_1	1	2	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	3	
Dz	0	- 1	0	$-\frac{1}{2}$	0	- m	0	$-\frac{1}{2}$ -2 m	- 3	

هذا الجدول أمثل لأن كل قيم السطر dz سالبة أو معدومة.

الحل باستعمال النموذج المقابل

$\text{Max } \pi = x_1 + x_2$

$x_1 + 2x_2 \leq 3$

$2x_1 + 4x_2 = 6$

$4x_1 + 8x_2 \geq 12$

$x_1, x_2 \geq 0$

الحل:

تحويل دالة الهدف من التعظيم إلى التقليل، ثم جعل كل القيود في الصيغة القانونية من الشكل ≤

$x_1 + 2x_2 \leq 3$

$2x_1 + 4x_2 \leq 6$

$- 2x_1 - 4x_2 \leq - 6$

$- 4x_1 - 8\ x_2 \leq - 12$

الطرف الثاني للمتراجحات يمثل معاملات دالة الهدف للبرنامج المقابل

$\text{Min} = 3\ y_1 + 6\ y_2 - 6\ y_3 - 12\ y_4$

نشكل المصفوفة الأصلية

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ -2 & -4 \\ -4 & -8 \end{vmatrix}$$

ثم نقوم بقلب المصفوفة

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & -4 \\ 2 & 4 & -4 & -8 \end{vmatrix}$$

من هذه المصفوفة نشكل قيود النموذج المقابل وذلك بمراعاة عكس اتجاه المتراجحات، والطرف الثاني هو معاملات دالة الهدف في البرنامج الأولي

$y_1 + 2y_2 - 2\ y_3 - 4\ y_4 \geq 1$

$2\ y_1 + 4\ y_2 - 4\ y_3 - 8\ y_4 \geq 1$

ثم نقوم بالحل كما تعودنا سابقا

$y_1 + 2y_2 - 2\ y_3 - 4\ y_4 - y_5^e + y_6^a = 1$

$2\ y_1 + 4\ y_2 - 4\ y_3 - 8\ y_4 - y_7^e + y_8^a = 1$

$\text{Min} = 3\ y_1 + 6\ y_2 - 6\ y_3 - 12\ y_4 + 0y_5^e + my_6^a + 0y_7^e + my_8^a$

نستخرج y^a من كل قيد ونعوضها في دالة الهدف الجديدة

$Y_6^a = 1 - y_1 - 2y_2 + 2\ y_3 + 4\ y_4 + y_5^e$

$Y_8^a = 1 - y_1 - 4\ y_2 + 4\ y_3 + 8\ y_4 + y_7^e$

Min = $3 y_1 + 6 y_2 - 6 y_3 - 12 y_4 + 0y_5^e + m (1 - y_1 - 2y_2 + 2 y_3 + 4 y_4 + y_5^e) + 0y_7^e + m (1 - y_1 - 4 y_2 + 4 y_3 + 8 y_4 + y_7^e)$

Min = $(3 - 3 m)y_1 + (6 - 6 m) y_2 + (- 6 + 6 m) y_3 + (- 12 + 12 m) y_4 + my_5^e + 0 y_6^a + my_7^e + 0y_8^a + 2 m$

	y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5^e	Y_6^a	Y_7^e	Y_8^a	Bi	bi / yi
Y_6^a	1	2	- 2	- 4	- 1	1	0	0	1	$\frac{1}{2}$
Y_8^a	2	4	- 4	- 8	0	0	- 1	1	1	$\frac{1}{4}$ ←
Dz	3 – 3 m	6 -6 m	- 6 + 6 m	- 12 + 12 m	M	0	m	0	2 m	

↑

هذا الجدول ليس أمثل لوجود قيم سالبة في الصف dz

	y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5^e	Y_6^a	Y_7^e	Y_8^a	Bi	bi / yi
Y_6^a	0	0	0	0	1 -	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1 ←
Y_2	$\frac{1}{2}$	1	- 1	- 2	0	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1 -
Dz	0	0	0	0	m	0	$\frac{3}{2} - \frac{1}{2} m$	$-\frac{3}{2} + \frac{3}{2} m$	$-\frac{3}{2} - \frac{1}{2} m$	

↑

هذا الجدول ليس أمثل لوجود قيم سالبة في الصف dz

	y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5^e	Y_6^a	Y_7^e	Y_8^a	bi	bi / yi
Y_7^e	0	0	0	0	- 2	2	1	- 1	1	
Y_2	$\frac{1}{2}$	1	- 1	- 2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	
Dz	0	0	0	0	3	- 3 +m	0	m	3 -	

هذا الجدول أمثل لأن كل قيم الصف dz موجبة أو معدومة وهي تتوافق مع حل التمرين السابق وذلك حسب النموذج الأولي.

التمرين رقم 26:

$\text{Min } c = x_1 + x_2$

$x_1 + 2x_2 \leq 3$

$2x_1 + 4x_2 = 6$

$4x_1 + 8x_2 \geq 12$

$x_1, x_2 \geq 0$

المطلوب: تحديد الكميات x_1, x_2 ؟ باستعمال النموذج الأولي بأسلوبان ثم باستعمال النموذج المقابل وماذا تلاحظ

أولا: الحل باستعمال النموذج الأولي وذلك بإبقاء القيد الذي فيه يساوي كما هو

نقوم بتحويل المتراجحات إلى معادلات

$x_1 + 2x_2 + x_3^e = 3$

$2x_1 + 4x_2 + x_4^a = 6$

$4x_1 + 8x_2 - x_5^e + x_6^a = 12$

$\text{Min } c = x_1 + x_2 + 0\, x_3^e + m\, x_4^a + 0\, x_5^e + m\, x_6^a$

$X_4^a = 6 - 2x_1 - 4x_2$

$X_6^a = 12 - 4x_1 - 8x_2 + x_5^e$

$\text{Min } c = (1 - 6m)\, x_1 + (1 - 12m)\, x_2 + 0\, x_3^e + 0\, x_4^e + m\, x_5^a + 0\, x_6^a + 18m$

	x_1	x_2	X_3^e	X_4^a	X_5^e	X_6^a	bi	bi / xi
X_3^e	1	2	1	0	0	0	3	$\frac{3}{2}$
X_4^a	2	4	0	1	0	0	6	$\frac{3}{2}$
X_6^a	4	8	0	0	- 1	1	12	$\frac{3}{2}$
Dz	1 - 6 m	1 - 12 m	0	0	m	0	- 18 m	

هذا الجدول ليس أمثل لوجود قيمة سالبة في السطر dz

ملاحظة: لما وجدنا في العمود bi قيمتان تساويان الصغر فقمنا بتعويضهما بالصفر وأكملنا الحل بشكل عادي.

	x_1	x_2	X_3^e	X_4^a	X_5^e	X_6^a	bi	bi / xi
X_3^e	0	0	1	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	£	£
X_4^a	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	£	£
X_2	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{2}$	- 12
Dz	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{8}-\frac{1}{2}m$	$-\frac{1}{8}+\frac{3}{2}m$	$-\frac{3}{2}$	

هذا الجدول ليس أمثل لوجود قيمة سالبة في السطر dz

	x_1	x_2	X_3^e	X_4^a	X_5^e	X_6^a	bi	bi / xi
X_3^e	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	£	
X_5^e	0	0	0	2	1	- 1	£	
X_2	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{3}{2}$	
Dz	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{4}+m$	0	m	$-\frac{3}{2}$	

هذا الجدول أمثل لأن كل قيم السطر dz موجبة أو معدومة

ثانيا: الحل باستعمال النموذج الأولي وذلك بقسمة القيد الذي فيه يساوي إلى قيدان أحداهما أكبر أو يساوي والأخر اصغر أو يساوي

$\text{Min } c = x_1 + x_2$

$x_1 + 2x_2 \leq 3$

$2x_1 + 4x_2 \leq 6$

$2x_1 + 4x_2 \geq 6$

$4x_1 + 8x_2 \geq 12$

$x_1, x_2 \geq 0$

نقوم بتحويل المتراجحات إلى معادلات

$x_1 + 2x_2 + x_3^e = 3$

$2x_1 + 4x_2 + x_4^e = 6$

$2x_1 + 4x_2 - x_5^e + x_6^a = 6$

$4x_1 + 8x_2 - x_7^e + x_8^a = 12$

$\text{Min } c = x_1 + x_2 + 0\, x_3^e + 0\, x_4^e + 0\, x_5^e + m\, x_6^a + 0\, x_7^e + m\, x_8^a$

$X_6^a = 6 - 2x_1 - 4x_2 + x_5^e$

$X_8^a = 12 - 4x_1 - 8x_2 + x_7^e$

$\text{Min } c = (1 - 6m)\, x_1 + (1 - 12m)\, x_2 + 0\, x_3^e + 0\, x_4^e + m\, x_5^e + 0\, x_6^a + m\, x_7^e + 0\, x_8^a + 18m$

	x_1	x_2	X_3^e	X_4^e	X_5^e	X_6^a	X_7^e	X_8^a	Bi	bi / xi
X_3^e	1	2	1	0	0	0	0	0	3	$\frac{3}{2}$
X_4^e	2	4	0	1	0	0	0	0	6	$\frac{3}{2}$
X_6^a	2	4	0	0	- 1	1	0	0	6	$\frac{3}{2}$ ←
X_8^a	4	8	0	0	0	0	- 1	1	12	$\frac{3}{2}$
Dz	1 - 6 m	1 - 12 m	0	0	m	0	m	0	- 18 m	

↑

هذا الجدول ليس أمثل لوجود قيم سالبة في السطر dz

	x_1	x_2	X_3^e	X_4^e	X_5^e	X_6^a	X_7^e	X_8^a	Bi	bi / xi
X_3^e	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	£	£
X_4^e	0	0	0	1	1	- 1	0	0	£	£
X_2	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{3}{2}$	- 6
X_8^a	0	0	0	0	2	- 2	- 1	1	£	£ ←
Dz	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{4} - 2$ m	$-\frac{1}{4} + 3$ m	m	0	$-\frac{3}{2}$	

↑

هذا الجدول ليس أمثل لوجود قيمة سالبة في السطر dz

	x_1	x_2	X_3^e	X_4^e	X_5^e	X_6^a	X_7^e	X_8^a	Bi	bi / xi
X_3^e	0	0	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	£	
X_4^e	0	0	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	£	
X_2	$\frac{1}{2}$	1	0	0	0	0	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{2}$	
X_5^e	0	0	0	0	1	- 1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	£	
Dz	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	m	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}+$ m	$-\frac{3}{2}$	

هذا الجدول أمثل لأن كل قيم السطر dz موجبة

ثالثا: الحل باستعمال النموذج المقابل

$\text{Min } c = x_1 + x_2$

تحويل دالة الهدف من التقليل إلى التعظيم، ثم جعل كل القيود في الصيغة القانونية من الشكل أكبر أو يساوي

$- x_1 - 2x_2 \geq -3$

$2x_1 + 4x_2 \geq 6$

$- 2x_1 - 4x_2 \geq -6$

$4x_1 + 8x_2 \geq 12$

$x_1, x_2 \geq 0$

الطرف الثاني للمتراجحات يمثل معاملات دالة الهدف للبرنامج المقابل

$\text{Max} = - 3\ y_1 + 6\ y_2 - 6\ y_3 + 12\ y_4$

نشكل المصفوفة الأصلية

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \\ -2 & -4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}$$

ثم نقوم بقلب المصفوفة

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & -4 & 8 \end{vmatrix}$$

من هذه المصفوفة نشكل قيود النموذج المقابل وذلك بمراعاة عكس اتجاه المتراجحات، والطرف الثاني هو معاملات دالة الهدف في البرنامج الأولي

$$- y_1 + 2y_2 - 2\, y_3 + 4\, y_4 \leq 1$$

$$- 2\, y_1 + 4\, y_2 - 4\, y_3 + 8\, y_4 \leq 1$$

ثم نقوم بالحل كما تعودنا سابقا

$$- y_1 + 2y_2 - 2\, y_3 + 4\, y_4 + y_5^e = 1$$

$$- 2\, y_1 + 4\, y_2 - 4\, y_3 + 8\, y_4 + y_6^e = 1$$

$$\text{Max} = - 3\ y_1 + 6\, y_2 - 6\, y_3 + 12\, y_4 + 0y_5^e + 0y_6^e$$

	y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5^e	Y_6^e	bi	bi / yi
Y_5^e	- 1	2	- 2	4	1	0	1	$\frac{1}{4}$
Y_6^e	- 2	4	- 4	8	0	1	1	$\frac{1}{8}$ ←
Dz	- 3	6	- 6	12	0	0	0	

↑

هذا الجدول ليس أمثل لوجود قيم موجبة في الصف dz

	y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5^e	Y_6^e	bi	bi / yi
Y_5^e	0	0	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	
Y_4	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	
Dz	0	0	0	0	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	

هذا الجدول أمثل لأن كل قيم السطر dz سالبة أو معدومة

وهو يقابل الحل الأمثل باستعمال النموذج الأولي حسب الطريقة الثانية كليا وجزئيا حسب الطريقة الأولى.

الفصل الرابع: تحليل الحساسية

بعد الحصول على الحل الأمثل، يمكن الذهاب إلى مرحلة أخرى وهي دراسة إمكانية بقاء الحل أمثل رغم التغيرات في النموذج الخطي، سواء كانت هذه التغيرات في المواد الأولية، أيدي عاملة، تكاليف، أرباح ... إلخ. والتي تؤثر في كل من:

- معاملات متغيرات دالة الهدف؛
- على الطرف الأيمن للقيود (الموارد المتاحة)؛
- على استخدامات الموارد المتاحة.

فتحليل الحساسية هو كيفية تحديد المجالات التي لن يتغير فيها الحل الأمثل، وخارج هذا المجال يفرض علينا إعادة حل البرنامج الخطي.

فعند الوصول إلى الحل الأمثل، فإننا نأخذ مصفوفة جزئية لأعمدة المتغيرات الداخلة في الحل الأمثل بنفس الترتيب ولتكن a_b ومصفوفة لأعمدة المتغيرات الغير داخلة في الحل الأساسي بترتيب تصاعدي ولتكن a_n مع ملاحظة أن المعادلة المصفوفية هي $a\ x = b$ ومنه يتحقق ما يلي:

$$A\ x = b \Leftrightarrow [a_b\ a_n] \begin{bmatrix} xb \\ xn \end{bmatrix} = b \quad \Leftrightarrow \ a_b\ xb + a_n\ xn = b$$

بضرب طرفي المعادلة الأخيرة في المصفوفة المرافقة لـ a_b فيتم التحصل على ما يلي:

$$x_b + a_b^{-1}\ a_n\ x_n = a_b^{-1}\ b$$

$$x_b = a_b^{-1}\ (b - a_n\ x_n)$$

بما أن المتغيرات خارج الأساس قيمها معدومة أي $x_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

و منه فإن $x_b = a_b^{-1}\ b$

حيث x_b هي مصفوفة ذات العمود الواحد المتكون من متغيرات الأساس.

أولا: تحليل الحساسية أثناء التغيير في الطرف الأيمن للقيود b (الموارد المتاحة)

إذا كانت نتيجة إضافة الزيادة أو النقصان بعد الضرب في العمود الخاص بـ x^e المرتبط بـ p_i الذي مسه التغيير، وبقيت كل قيم العمود p_i موجبة فإن التغيرات هي ضمن المجال الذي يبقى الحل أمثلا، أما إذا أصبحت إحدى القيم على الأقل سالبة، فهذا يعنى أن الحل أصبح غير أمثل، فعلينا الاستمرار في الحل[1].

ويكون ذلك من خلال العلاقة $b/ = b + \triangle b$ فيكون لدينا:

$$Min\ z = c^t x$$

$$Ax < b/$$

$$X \geq 0$$

الحل يكون أمثل إذا تحقق شرط الأمثلية $x_b \geq 0$ أي $a_b^{-1}\ b \geq 0$

ومتغيرات الأساس x_b تبقى مثلى إذا تحقق ما يلي:

$$a_b^{-1}\ b/ \geq 0 \Longleftrightarrow a_b^{-1}\ (b + \triangle b) \geq 0$$

$$a_b^{-1} \triangle b \geq -\ a_b^{-1}\ b$$

فعلينا حساب x_b حيث $x_b = a_b^{-1}\ b$

ولدينا

$$b = \begin{pmatrix} b1 \\ b2 \\ bn \end{pmatrix}$$

- إذا كان التغير فقط في b_1 فإن

$$b/ = \begin{pmatrix} (b1 + \sigma) \\ b2 \\ bn \end{pmatrix}$$

[1] حسين محمود الجنابي، مصدر سبق ذكره، ص 133.

ونقوم بحساب $x_b/$

$x_b/ = a_b^{-1}\ b/$

وحتى يبقى شرط الأمثلية محقق يجب أن يكون $x_b/ \geq 0$ وهي عبارة عن مصفوفة ذات عمود واحد وخاناته بدلالة σ، فكل عنصر من عناصر $x_b/$ يجب أن يكون أكبر أو يساوي الصفر لأنها متغيرات أساس، فتتشكل مجموعة متراجحات يمكن من خلالها استنتاج المجال الذي فيه σ تحقق كل المتراجحات، وهو المجال الذي يبقى فيه الحل أمثل.

- إذا كان التغير فقط في b_2 فإن

- $b/ = \begin{pmatrix} b1 \\ (b2 + \sigma) \\ bn \end{pmatrix}$

ونقوم بنفس العملية.

وهناك طريقة ثانية والتي تعتمد على عناصر عمود متغيرة الفجوة المرتبطة بالعنصر bi المتغيرة قيمته والمقابل لكل من متغيرات الأساس في الحل الأمثل هي تمثل مقدار التغيير المتاح.

ولدينا القيم الجديدة لمتغيرة الأساس = القيمة القديمة لمتغيرات الأساس + (مقدار التغيير المتاح * مقدار تغيير قيمة متغيرة الأساس)

ويبقى الحل أمثل إذا كانت كل القيم الجديدة لمتغيرات الأساس أكبر أو يساوي الصفر (شرط عدم السالبية) ومن خلال كل المتراجحات نحدد مجال تغيير أحد عناصر bi حتى يبقى الحل أمثل.

ثانيا: تحليل الحساسية عند التغيير في معاملات دالة الهدف

الحساسية تبين المدى الأمثل للمتغير غير الأساسي بمجال القيم لمعامل هذا المتغير في دالة الهدف حتى يبقى متغيرا غير أساسيا، أما متغيرات الأساس فهو المجال الذي يبقيه داخل الأساس، ومن المفروض أن يتم تحليل الحساسية لكل متغيرة على حده لكي يكون دقيقا[1].

2-1) التغيير في معامل متغيرة حقيقية خارج أساس الحل الأمثل ولتكن c_3 فيكون مجال الثبات مرتبط بتحقق ما يلي:

القيمة القديمة في الجدول الأمثل قبل التغير المقابلة للمتغيرة الحقيقية x التي تغير معاملها + Δ، يجب أن تبقى تحقق شرط الأمثلية أقل أو يساوي الصفر لما دالة الهدف في حالة تعظيم وأكبر أو يساوي الصفر في حالة تقليل.

مع ملاحظة بقاء قيم متغيرات الأساس نفسها وكذلك قيمة دالة الهدف.

2-2) التغيير في معامل متغيرة حقيقية داخل أساس الحل الأمثل

عند التغيير في معامل متغيرة حقيقية داخل أساس الحل الأمثل، فإن القيمة المقابلة لكل متغيرة في الصف d z تساوي القيمة المقابلة لكل متغيرة في الصف d z قبل ما يكن تغيير + (- Δ) القيمة الموجودة في الصف المتغيرة التي تم تغيير معاملها في دالة الهدف، وهذا كذلك بالنسبة لقيمة الدالة.

يبقى الجدول أمثل، إذا كانت جميع عناصر الصف d z الجديدة سالبة أو معدومة في حالة التعظيم وموجبة أو معدومة في حالة التقليل، فتتشكل لنا مجموعة متراجحات حلها يبن لنا المجال الذي يبقى فيه الحل أمثل.

[1] علي العلاونة، محمد عبيدات وعبد الكريم عواد، مصدر سبق ذكره، ص 228.

التمرين رقم 27:

هذا التمرين يتعلق بالتغير في الطرف الأيمن

$\text{Max } \pi = 4\ x_1 + 2\ x_2 + 6\ x_3$

$2\ x_1 + 4\ x_2 + 6\ x_3 \leq 30$

$x_1 + x_3 \leq 8$

$4\ x_1 + 8\ x_2 + 2\ x_3 \leq 24$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

الحل:

$2\ x_1 + 4\ x_2 + 6\ x_3 + x_4^e = 30$

$x_1 + x_3 + x_5^e = 8$

$4\ x_1 + 8\ x_2 + 2\ x_3 + x_6^e = 24$

$x_1, x_2, x_3, x_4^e, x_5^e, x_5^e \geq 0$

$\text{Max } \pi = 4\ x_1 + 2\ x_2 + 6\ x_3 + 0\ x_4^e + 0\ x_5^e + 0\ x_6^e$

الجدول الأساسي الأول:

	x_1	x_2	x_3	x_4^e	x_5^e	X_6^e	Bi	Bi / xi
x_4^e	2	4	6	1	0	0	30	5 ←
X_5^e	1	0	1	0	1	0	8	8
X_6^e	4	8	2	0	0	1	24	12
d z	4	2	6 ↑	0	0	0	0	

الجدول الأساسي الأمثل:

	x_1	x_2	x_3	x_4^e	x_5^e	X_6^e	Bi	Bi / xi
X_3	0	0	1	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{1}{10}$	$\frac{18}{5}$	
X_5^e	0	-2	0	$-\frac{1}{10}$	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	
X_1	1	2	0	$-\frac{1}{10}$	0	$\frac{3}{10}$	$\frac{21}{5}$	
d z	0	-6	0	$-\frac{4}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{192}{5}$	

هذا الجدول أمثل لأن كل قيم الصف d z سالبة أو معدومة.

$$\text{Max } \pi = 4 \times \frac{21}{5} + 2 \times 0 + 6 \times \frac{18}{5} + 0 \times 0 + 0 \times \frac{1}{5} + 0 \times \frac{1}{5} + 0 \times 0 \ \Delta$$

$$\text{Max } \pi = \frac{84}{5} + \frac{108}{5} = \frac{192}{5}$$

على هذه المؤسسة إنتاج وبيع $\frac{21}{5}$ وحدة من x_1 وإنتاج وبيع $\frac{18}{5}$ وحدة من x_3 وعدم إنتاج أي وحدة من x_2 ويبقى $\frac{1}{5}$ كمواد أولية من القيد المتعلق بـ x_5^e حتى تحقق ربح قدره $\frac{192}{5}$ دج.

الربح الحدي هو الفرق بين المعامل في دالة الهدف والقيمة المقابلة لكل عنصر في الصف d z ضمن الجدول الأمثل، في مثالنا هذا القيم هي كما يلي:

الربح الحدي لـ x_4^e أي القيد الأول هو $0 - (-\frac{4}{5}) = \frac{4}{5}$

الربح الحدي لـ x_5^e أي القيد الثاني هو $0 - (0) = 0$

الربح الحدي لـ x_6^e أي القيد الثالث هو $0 - (-\frac{3}{5}) = \frac{3}{5}$

فإن كان التغير في القيد الأول بوحدة واحدة بالزيادة فإن الربح سيزداد بـ $\frac{4}{5}$ دج وعند التخفيض سينخفض

بـ $\frac{4}{5}$ دج، فعند زيادة الطرف الأيمن للقيد الأول من 30 إلى 31 وقمنا بإعادة حل هذا البرنامج، فإننا سنجد في الحل الأمثل النتائج التالية:

$$x_1 = \frac{21}{5} - \frac{1}{10} = \frac{42-1}{10} = \frac{41}{10}$$

$$x_3 = \frac{18}{5} + \frac{1}{5} = \frac{18+1}{5} = \frac{19}{5}$$

أما $x_2 = 0$ هو خارج متغيرات الأساس للحل الأمثل.

$$\text{Max } \pi = 4\, x_1 + 2\, x_2 + 6\, x_3 + 0\, x_4^e + 0\, x_5^e + 0\, x_6^e$$

$$\text{Max } \pi' = 4\left(\frac{41}{10}\right) + 2\,(0) + 6\left(\frac{19}{5}\right) + 0\,(0) + 0\left(\frac{1}{5}\right) + 0\,(0) = \frac{82}{5} + \frac{114}{5} = \frac{196}{5}$$

أما سابقا فإن $\text{Max } \pi = \frac{192}{5}$ أي مقدار الزيادة هو

$$\Delta \text{ Max } \pi = \frac{196}{5} - \frac{192}{5} = \frac{4}{5}$$

مع ملاحظة أنه سيحدث كذلك تغيير في الطاقات الغير مستعملة من القيد الثاني (x_5^e) بـ ($-\frac{1}{10}$) وحدة أي تصبح $\frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{2-1}{10} = \frac{1}{10}$

وعند التخفيض في القيد الأول من 30 إلى 29 وقمنا بإعادة الحل لهذا البرنامج فإن التغير يكون بإشارة معكوسة أي

$$x_1 = \frac{21}{5} + \frac{1}{10} = \frac{42+1}{10} = \frac{43}{10}$$

$$x_3 = \frac{18}{5} - \frac{1}{5} = \frac{18-1}{5} = \frac{17}{5}$$

$$x_5^e = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{2+1}{10} = \frac{3}{10}$$

$\text{Max } \pi$ سينخفض بـ $\frac{4}{5}$ دج

$$\text{Max } \pi' = 4\left(\frac{43}{10}\right) + 2\,(0) + 6\left(\frac{17}{5}\right) + 0\,(0) + 0\left(\frac{1}{5}\right) + 0\,(0) = \frac{86}{5} + \frac{102}{5} = \frac{188}{5}$$

$$\Delta \text{ Max } \pi = \frac{188}{5} - \frac{192}{5} = -\frac{4}{5}$$

تعريف سعر الظل: هو القيمة الحدية للمورد أي معدل التحسين في دالة الهدف الذي ينتج من إضافة وحدة واحدة إلى كمية هذا المورد، أي إضافة وحدة واحدة إلى الطرف الأيمن من معادلة القيد.

يمكن الحصول على المعلومات المتعلقة بأسعار الظل من قيم الصف dz

وهذه النتائج تدل أن زيادة وحدة واحدة من أي مورد ستؤدي إلى زيادة قيمة دالة الهدف بمقدار سعر الظل، وستؤثر هذه الزيادة على جدول الحل الأمثل، حيث يمكن استنتاج قيم العمود bi أي الطرف الأيمن الجديد باستخدام العلاقة التالية:

الكميات الجديدة للعمود b_i = القيمة الأصلية للعمود b_i في الجدول الأمثل+ مقدار التغير في الكمية المورد x_1 × القيمة المقابلة في العمود x_4^e الممثل للمورد x_1

$$\begin{vmatrix} X^*_3 \\ X^*_5{}^e \\ X^*_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{18}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{21}{5} \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{-1}{10} \\ \frac{-1}{10} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{19}{5} \\ \frac{1}{10} \\ \frac{41}{10} \end{vmatrix}$$

حساب قيمة dz الجديدة

$$\text{Max } \pi^* = 4\,x_1 + 2\,x_2 + 6\,x_3 + 0\,x_4^e + 0\,x_5^e + 0\,x_6^e$$

$$\text{Max } \pi^* = 4 \times \frac{41}{10} + 2 \times 0 + 6 \times \frac{19}{5} + 0 \times 0 + 0 \times \frac{1}{10} + 0 \times 0 = \frac{164}{10} + \frac{114}{5}$$

$$\text{Max } \pi^* = \frac{82}{5} + \frac{114}{5} = \frac{196}{5}$$

سعر الظل لـ X^*_1= قيمة $\text{Max}^* \pi$ الجديدة - قيمة $\text{Max } \pi$ القديمة

$$\text{سعر الظل} = \frac{196}{5} - \frac{192}{5} = \frac{4}{5}$$

ومنه سعر الظل لـ X^*_1 هو نفسه الربح الحدي لـ x_4^e أي القيد الأول

الكميات الجديدة للعمود b_i = القيمة الأصلية للعمود b_i في الجدول الأمثل+ مقدار التغير في الكمية المورد x_2 × القيمة المقابلة في العمود x_5^e الممثل للمورد x_2

$$\begin{vmatrix} X^*_3 \\ \\ \\ \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{18}{5} \\ \\ \\ \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 88 \\ \\ \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{18}{5} \\ \\ \\ \end{vmatrix}$$

$$X^*_5{}^e = \frac{1}{5} + 1 \quad 1 = \frac{6}{5}$$

$$X^*_1 \quad \frac{21}{5} \quad 0 \quad \frac{21}{5}$$

حساب قيمة dz الجديدة

$$\text{Max } \pi^* = 4\,x_1 + 2\,x_2 + 6\,x_3 + 0\,x_4^e + 0\,x_5^e + 0\,x_6^e$$

$$\text{Max } \pi^* = 4 \times \frac{21}{5} + 2 \times 0 + 6 \times \frac{18}{5} + 0 \times 0 + 0 \times \frac{6}{5} + 0 \times 0 = \frac{84}{5} + \frac{108}{5} = \frac{192}{5}$$

سعر الظل لـ X^*_2= قيمة π *Max الجديدة - قيمة π Max القديمة

سعر الظل = $\frac{192}{5} - \frac{192}{5} = 0$

ومنه سعر الظل لـ X^*_2 هو نفسه الربح الحدي لـ x_5^e أي القيد الثاني

الكميات الجديدة للعمود b_i = القيمة الأصلية للعمود b_i في الجدول الأمثل+ مقدار التغير في الكمية

المورد x_3 × القيمة المقابلة في العمود x_5^e الممثل للمورد x_3

$$\begin{vmatrix} X^*_3 \\ X^*_5{}^e \\ X^*_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{18}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{21}{5} \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} \frac{-1}{10} \\ \frac{-1}{5} \\ \frac{3}{10} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{35}{10} \\ 0 \\ \frac{45}{10} \end{vmatrix}$$

حساب قيمة dz الجديدة

$$\text{Max } \pi^* = 4\,x_1 + 2\,x_2 + 6\,x_3 + 0\,x_4^e + 0\,x_5^e + 0\,x_6^e$$

$$\text{Max } \pi^* = 4 \times \frac{45}{10} + 2 \times 0 + 6 \times \frac{35}{10} + 0 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 0 = \frac{180}{10} + \frac{210}{10} = 39$$

سعر الظل لـ X^*_3= قيمة π *Max الجديدة - قيمة π Max القديمة

سعر الظل = $39 - \frac{192}{5} = \frac{195 - 192}{5} = \frac{3}{5}$

ومنه سعر الظل لـ X^*_3 هو نفسه الربح الحدي لـ x_6^e أي القيد الثالث

ما تم عرضه سابقا يمثل التغير بوحدة واحدة في القيد الأول، أما الآن فسيتم تحديد عدد الوحدات الأقصى الذي يمكن الزيادة أو التخفيض به حتى تبقى مختلف معاملات التغيير صالحة للاستعمال وذلك بالقيام بما يلي:

حتى تبقى القيم المقابلة لمتغيرات الأساس موجبة في العمود bi.

الحل الأمثل Bi $+ x_4^e{}_i \Delta \geq 0$

$$\frac{18}{5} + \frac{1}{5} \Delta \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \Delta \geq -18$$

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{10} \Delta \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \Delta \leq 2$$

$$\frac{21}{5} - \frac{1}{10} \Delta \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \Delta \leq 42$$

عند مقاطعة كل المجالات نجد المجال المقبول هو [2 ,18 −] أي يبقى الحل أمثل إذا تغير الطرف الأيمن للقيد الأول [2 + 30 ,18 − 30] = [12, 32]

أما إذا كان التغير خارج هذا المجال، فيجب إعادة الحل من جديد لأن مختلف معاملات التغير تصبح غير صالحة للاستعمال.

$$a_b = \begin{array}{c} X_3 \quad x_5^e \quad x_1 \\ \left| \begin{array}{ccc} 6 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{array} \right| \end{array} \qquad a_n = \begin{array}{c} x_2 \quad x_4^e \quad x_6^e \\ \left| \begin{array}{ccc} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 1 \end{array} \right| \end{array}$$

حيث a_b مصفوفة متغيرات الأساس في الحل الأمثل، و a_n مصفوفة متغيرات خارج الأساس في الحل الأمثل.

حساب x_b حيث $x_b = a_b^{-1} b$ فيجب أولا تحديد a_b^{-1}

$$\det a_b = +6 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$\det a_b = +6 [(1 \times 4) - (1 \times 0)] - 0 [(1 \times 4) - (1 \times 2)] + 2 [(1 \times 0) - (1 \times 2)] = 24 - 0 - 4 = 20$

$\det a_b = 20 \neq 0$

فهذه المصفوفة تقبل مصفوفة معكوسة

فيجب تحديد المصفوفة المرافقة

$a_b^c = (-1)^{\text{رتبة السطر + رتبة العمود}} \times \det$ المصفوفة المتبقية

$$a_b^c = \begin{vmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 0 & 20 & 0 \\ -2 & -4 & 6 \end{vmatrix}$$

ثم نجد المصفوفة المساعدة a^h وهي مدور المصفوفة المرافقة

$$a_b^h = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -2 & 20 & -4 \\ -2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

ثم نحدد مقلوب المصفوفة

$$a_b^{-1} = \frac{\text{abh}}{\det \text{ab}} = \begin{vmatrix} \frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & 1 & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{10} & 0 & \frac{3}{10} \end{vmatrix}$$

a_b^{-1} تمثل كذلك عناصر أعمدة متغيرات الفجوة في الحل الأمثل.

الحل يكون أمثل إذا تحقق شرط الأمثلية

$x_b \geq 0$ أي $a_b^{-1} b \geq 0$

حتى يبقى الحل الأساسي أمثل بعد التغير في الطرف الأيمن bi إلى bi/ فيجب أن يكون $a_b^{-1} b \geq 0$

أولا: التغير في الطرف الأيمن الأول:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & 1 & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{10} & 0 & \frac{3}{10} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 30+\Delta \\ 8 \\ 24 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{5}\times(30+\Delta)+0\times 8-\frac{1}{10}\times 24 \\ \frac{-1}{10}\times(30+\Delta)+1\times 8-\frac{1}{5}\times 24 \\ \frac{-1}{10}\times(30+\Delta)+0\times 8+\frac{3}{10}\times 24 \end{vmatrix} \geq 0$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{5}\Delta+\frac{18}{5} \\ \frac{-1}{10}\Delta+\frac{1}{5} \\ \frac{-1}{10}\Delta+\frac{21}{5} \end{vmatrix} \geq 0 \Longrightarrow \begin{matrix} \frac{1}{5}\Delta+\frac{18}{5} \geq 0 \\ \frac{-1}{10}\Delta+\frac{1}{5} \geq 0 \\ \frac{-1}{10}\Delta+\frac{21}{5} \geq 0 \end{matrix} \Longrightarrow \begin{matrix} \Delta \geq -18 \\ \Delta \leq 2 \\ \Delta \leq 21 \end{matrix}$$

$$-18 \leq \Delta \leq 2$$

ومنه الطرف الأيمن الأول يكون ضمن المجال [2 + 30 ,18 − 30] = [12, 32] حتى يبقى الحل أمثل.

ثانيا: التغير في الطرف الأيمن الثاني:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & 1 & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{10} & 0 & \frac{3}{10} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 30 \\ 8+\Delta \\ 24 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{5}\times 30+0\times(8+\Delta)-\frac{1}{10}\times 24 \\ \frac{-1}{10}\times 30+1\times(8+\Delta)-\frac{1}{5}\times 24 \\ \frac{-1}{10}\times 30+0\times(8+\Delta)+\frac{3}{10}\times 24 \end{vmatrix} \geq 0$$

$$\begin{vmatrix} \frac{18}{5} \\ \Delta+\frac{1}{5} \\ \frac{21}{5} \end{vmatrix} \geq 0 \Longrightarrow \begin{matrix} \frac{18}{5} \geq 0 \\ \Delta+\frac{1}{5} \geq 0 \\ \frac{21}{5} \geq 0 \end{matrix} \Longrightarrow \begin{matrix} \frac{18}{5} \geq 0 \\ \Delta \geq \frac{-1}{5} \\ \frac{21}{5} \geq 0 \end{matrix}$$

$$\frac{-1}{5} \leq \Delta \leq +\infty$$

ومنه الطرف الأيمن الأول يكون ضمن المجال [∞+ ,8 − $\frac{1}{5}$] = [∞+ , $\frac{39}{5}$] حتى يبقى الحل أمثل.

∞+ لأن الطاقات الغير مستعملة مهما زادت لا تغير من الربح الأعظم.

ثالثا: التغير في الطرف الأيمن الثالث:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{5} & 1 & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{10} & 0 & \frac{3}{10} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 30 \\ 8 \\ 24+\Delta \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{5}\times 30+ 0\times 8-\frac{1}{10}\times(24+\Delta) \\ \frac{-1}{10}\times 30+ 1\times 8-\frac{1}{5}\times(24+\Delta) \\ \frac{-1}{10}\times 30+ 0\times 8+\frac{3}{10}\times(24+\Delta) \end{vmatrix} \geq 0$$

$$\begin{vmatrix} \frac{-1}{10}\Delta+\frac{18}{5} \\ \frac{-1}{5}\Delta+\frac{13}{5} \\ \frac{3}{10}\Delta+\frac{21}{5} \end{vmatrix} \geq 0 \Longrightarrow \begin{matrix} \frac{-1}{10}\Delta+\frac{18}{5} \geq 0 \\ \frac{-1}{5}\Delta+\frac{13}{5} \geq 0 \\ \frac{3}{10}\Delta+\frac{21}{5} \geq 0 \end{matrix} \Longrightarrow \begin{matrix} \Delta \leq 36 \\ \Delta \leq 13 \\ \Delta \geq -14 \end{matrix}$$

$$-14 \leq \Delta \leq 13$$

ومنه الطرف الأيمن الثالث يكون ضمن المجال $[24-14,\ 24+13]$ = [10 , 37] حتى يبقى الحل أمثل.

التمرين رقم 28:

1- بين مجال التغيير في معامل متغيرة حقيقية خارج أساس الحل الأمثل ولتكن x_2؟

2- بين مجال التغيير في معامل متغيرة حقيقية داخل أساس الحل الأمثل ولتكن x_1؟

الحل:

1- تبين مجال التغيير في معامل متغيرة حقيقية خارج أساس الحل الأمثل ولتكن x_2.

$$\text{Max } \pi = 4\,x_1 + 2\,x_2 + 6\,x_3 + 0\,x_4^e + 0\,x_5^e + 0\,x_6^e$$

$$\text{Max } \pi = 4\,x_1 + (2 + \Delta)\,x_2 + 6\,x_3 + 0\,x_4^e + 0\,x_5^e + 0\,x_6^e$$

	x_1	x_2	x_3	x_4^e	x_5^e	x_6^e	Bi	Bi / xi
x_4^e	2	4	6	1	0	0	30	5 ←
X_5^e	1	0	1	0	1	0	8	8
X_6^e	4	8	2	0	0	1	24	12
d z	4	2 + Δ	6 ↑	0	0	0	0	

هذا الجدول ليس أمثل لوجود قيم موجبة في السطر dz

	x_1	x_2	x_3	x_4^e	x_5^e	x_6^e	Bi	Bi / xi
X_3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{6}$	0	0	5	15
X_5^e	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{6}$	1	0	3	$\frac{9}{2}$
X_6^e	$\frac{10}{3}$	$\frac{20}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	1	14	$\frac{21}{5}$ ←
d z	2 ↑	-2+ Δ	0	-1	0	0	-30	

$$\text{Max } \pi = 4 \times 0 + 2 \times 0 + 6 \times 5 + 0 \times 0 + 0 \times 3 + 0 \times 14 = 30$$

هذا الجدول ليس أمثل لوجود قيمة موجبة في السطر dz

	x_1	x_2	x_3	x_4^e	x_5^e	X_6^e	Bi	Bi / xi
X_3	0	0	1	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{1}{10}$	$\frac{18}{5}$	
X_5^e	0	-2	1	$-\frac{1}{10}$	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	
X_1	1	2	0	$-\frac{1}{10}$	0	$\frac{3}{10}$	$\frac{21}{5}$	
d z	0	-6+ Δ	0	$-\frac{4}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{192}{5}$	

هذا الجدول أمثل لأن كل قيم d z سالبة أو معدومة.

عند تغير معامل x_2 من 2 إلى Δ + 2 فإن القيمة المقابلة لـ x_2 في الصف d z تصبح Δ -6+ و يبقى جدول الحل أمثل إذا تحقق شرط الأمثلية لنموذج التعظيم $0 \leq$ Δ -6+

$$-6+\Delta \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \leq 6$$

أي أن الحل الأمثل الذي يقدمه الجدول يبقى أمثلا ما دام مقدار التغير للمتغيرة x_2 أقل أو يساوي 6، أما إذا فاق هذه القيمة فإن الحل لا يصبح أمثل.

القيمة القديمة في الجدول الأمثل قبل التغير المقابلة للمتغيرة الحقيقية x التي تغير معاملها + Δ ، يجب أن يبقى يحقق شرط الأمثلية أقل أو يساوي الصفر لما دالة الهدف في حالة تعظيم وأكبر أو يساوي الصفر في حالة تقليل.

2- تبين مجال التغيير في معامل متغيرة حقيقية داخل أساس الحل الأمثل ولتكن x_1.

$$\text{Max } \pi = 4\, x_1 + 2\, x_2 + 6\, x_3 + 0\, x_4^e + 0\, x_5^e + 0\, x_6^e$$

$$\text{Max } \pi = (4 + \Delta)\, x_1 + (2 + \Delta)\, x_2 + 6\, x_3 + 0\, x_4^e + 0\, x_5^e + 0\, x_6^e$$

	x_1	x_2	x_3	x_4^e	x_5^e	x_6^e	Bi	Bi / xi
x_4^e	2	4	6	1	0	0	30	5 ←
X_5^e	1	0	1	0	1	0	8	8
X_6^e	4	8	2	0	0	1	24	12
d z	4 + Δ	2	6	0	0	0	0	

↑

هذا الجدول ليس أمثل لوجود قيم موجبة في السطر dz

	x_1	x_2	x_3	x_4^e	x_5^e	x_6^e	Bi	Bi / xi
X_3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{6}$	0	0	5	15
X_5^e	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{6}$	1	0	3	$\frac{9}{2}$
X_6^e	$\frac{10}{3}$	$\frac{20}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	1	14	$\frac{21}{5}$ ←
d z	2 + Δ	-2	0	-1	0	0	-30	

↑

$\text{Max } \pi = 4 \times 0 + 2 \times 0 + 6 \times 5 + 0 \times 0 + 0 \times 3 + 0 \times 14 = 30$

هذا الجدول ليس أمثل لوجود قيمة موجبة في السطر dz

	x_1	x_2	x_3	x_4^e	x_5^e	X_6^e	Bi	Bi / xi
X_3	0	0	1	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{1}{10}$	$\frac{18}{5}$	
X_5^e	0	-2	1	$-\frac{1}{10}$	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	
X_1	1	2	0	$-\frac{1}{10}$	0	$\frac{3}{10}$	$\frac{21}{5}$	
d z	0	-6 - 2Δ	0	$-\frac{4}{5}+\frac{1}{10}\Delta$	0	$-\frac{3}{5}-\frac{3}{10}\Delta$	$-\frac{192}{5}-\frac{21}{5}\Delta$	

هذا الجدول أمثل لأن كل قيم d z سالبة أو معدومة.

عند التغيير في معامل متغيرة حقيقية داخل أساس الحل الأمثل، فإن القيمة المقابلة لكل متغيرة في الصف d z تساوي القيمة المقابلة لكل متغيرة في الصف d z قبل ما يكن تغيير + (- Δ) القيمة الموجودة في الصف المتغيرة التي تم تغيير معاملها في دالة الهدف. وهذا كذلك لقيمة الدالة.

يبقى الجدول أمثل، إذا كانت جميع عناصر الصف d z الجديدة سالبة أو معدومة لأننا في حالة التعظيم، فتتشكل لنا مجموعة متراجحات حلها يبن لنا المجال الذي يبقى فيه الحل أمثل.

$-6 - 2\Delta \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \geq -3$

$-\frac{4}{5}+\frac{1}{10}\Delta \leq 0 \Rightarrow \Delta \leq 8$

$-\frac{3}{5}-\frac{3}{10}\Delta \leq 0 \Rightarrow \Delta \geq -2$

ومنه $-2 \leq \Delta \leq 8$

فمعامل x_1 يجب أن ينتمي للمجال [8 + 4 , 2 − 4] = [12 , 2] حتى يبقى الحل أمثل.

الفصل الخامس: حل مسائل النقل

أولا: حل مسائل النقل في حالة التقليل

حيث يسعى صاحب المؤسسة إلى تحقيق أقصى ربح، وذلك عن طريق التركيز على تقليل تكلفة نقل البضائع من عدة مناطق إنتاج والتي تسمى المنابع إلى عدة نقاط بيع والتي تسمى المصبات وذلك في حدود كميات محدودة.

ويكون جدول النقل كما يلي:

	مصب 1	مصب 2	مصب 3	مصب 4	**العرض**
منبع 1	**C 11** X 11	**C12** X 12	**C13** X13	**C14** X14	**A 1**
منبع 2	**C21** X 21	**C22** X 22	**C23** X23	**C24** X24	**A 2**
منبع 3	**C31** X 31	**C32** X 32	**C33** X 33	**C34** X 34	**A 3**
الطلب	**B 1**	**B 2**	**B 3**	**B 4**	**المجموع**

بحيث x_{ij} هي الكمية التي يمكن تمون بها وحدة الإنتاج i المنطقة j والتي تكون مجهولة يتم البحث عنها من خلال الرياضيات المؤسسة، بينما c_{ij} هي تكاليف النقل الوحدوية والتي تكون معلومة بالنسبة لنا وذلك من خلال المحاسبة التحليلية.

الصيغة الرياضية لمسألة النقل:

دالة التكلفة الإجمالية التي تتحملها المؤسسة هي:

$$Z = c_{11}X_{11} + c_{12}X_{12} + c_{13}X_{13} + c_{14}X_{14} + c_{21}X_{21} + c_{22}X_{22} + c_{23}X_{23} + c_{24}X_{24} + c_{31}X_{31} + c_{32}X_{32} + c_{33}X33 + c_{34}X_{34}$$

$$Z = \sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{3} c\,ij\,x\,ij$$

الكميات التي يعرضها كل منبع هي:

المنبع 1 $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = a\ 1$

المنبع 2 $x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = a\ 1$

المنبع 3 $x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = a\ 1$

الكميات التي يطلبها كل مصب هي:

المصب 1 $x_{11} + x_{21} + x_{31} = b\ 1$

المصب 2 $x_{12} + x_{22} + x_{32} = b\ 2$

المصب 3 $x_{13} + x_{23} + x_{33} = b\ 3$

المصب 4 $x_{14} + x_{24} + x_{34} = b\ 4$

ومنه الصيغة الرياضية لمسألة النقل عند السعي لتقليل التكلفة بهدف زيادة الربح كما يلي:

$\min Z = \sum_{j=1}^{4} \sum_{i=1}^{3} c_{ij}\, x_{ij}$

$\sum_{j=1}^{4} xij = a\ i$

$\sum_{i=1}^{3} xij = b\ i$

$X_{ij},\ c_{ij} \geq 0$

طرق حل مسألة النقل في حالة تقليل التكلفة

1- طريقة التكلفة الدنيا

ونقوم بإتباع الخطوات التالية:

- في البداية يجب التأكد أن مجموع كميات العرض تساوي مجموع كميات الطلب وإلا لا يمكن حل هذه المسألة؛
- القيام بملأ الخلايا انطلاقا من أدنى تكلفة ثم التكلفة المساوية فالأعلى وهكذا حتى نكمل كل العرض ونحقق كل الطلب مع التأكد من أن عدد المتغيرات الداخلة في الحل يساوي عدد المنابع زائد عدد المصبات ناقص واحد؛

- اختبار ما إذا كان الحل أمثل أو لا وذلك باستعمال طريقة التوزيع المعدل وذلك بالقيام بما يلي:

1- افتراض مجهولين v_j و u_i حيث v_j يمثل الأعمدة و u_i يمثل الأسطر، بحيث حاصل جمعها بالنسبة للخلايا الداخلة في الحل يجب أن تساوي تكلفة نقل الوحدة الواحدة عبر تلك الخلية أي

$$C_{ij} = u_i + v_j$$

2- إيجاد كل المجاهيل v_j و u_i للخلايا الداخلة في الحل الأساسي وذلك بافتراض قيمة واحدة فقط تساوي صفر؛

3- إيجاد التكلفة الحدية للخلايا الغير داخلة في الحل الأساسي وذلك عن طريق المعادلة التالية

$$\delta ij = C_{ij} - u_i - v_j$$

فإذا كل δij موجبة أو معدومة، فإن هذا الحل الأساسي أمثل، وإلا يجب الانتقال إلى الجدول الموالي وذلك بالقيام بما يلي:

تحديد الخلية التي فيها δij أقل قيمة سالبة، ويتم إدخالها للحل الأساسي بحيث نظيف لها عددا s وننقص s من خلية في صفها وكذلك خلية في عمودها ونضيف s في خلية أخرى مقابلة وهذا هو أسلوب التغيير في أربعة خانات وهو الأسلوب الأبسط وقد نغير في أكثر من أربعة خانات وذلك بالمحافظة على كل الطلبات وكل العروض ويتم اختيار قيمة s من أصغر قيمة موجودة في الخانات التي سنقص منها s، بحيث تخرج خانة واحدة من خانات الأساس، حيث تصبح قيمتها تساوي صفر.

2- طريقة فوجل:

هي من أهم الطرق لإيجاد الجدول الأول، وهذا لما تتميز به من القدرة إلى الوصول للحل الأمثل مباشرة أو الحل القريب من الأمثل، وتتلخص خطواته فيما يلي:[1]

- حساب الفرق بين أقل تكلفتين في كل صف وفي كل عمود في جدول التكلفة؛

- تحديد الصف أو العمود الذي يمتلك أكبر فرق تكلفة؛

[1] فتيحة بلجيلالي (2018): رياضيات المؤسسة، مطبوعة بيداغوجية، كلية العلوم الاقتصادية التجارية وعلوم التسيير، جامعة ابن خلدون، تيارت، ص 106.

– اختيار الخلية ذات التكلفة الأقل في ذلك الصف أو العمود؛

– نقوم بملأ تلك الخلية وذلك بمراعاة الكمية المتوفرة من المنبع وما هو مطلوب من المصب ونضع أقلهما؛

– نعيد حساب الفروقات وذلك بعد إلغاء العمود أو الصف المشبع ونكرر هذه العملية حتى تلبية كل احتياجات المصبات من المنابع المتاحة.

3– **طريقة الركن الشمالي الغربي:**

ومراحلها هي كما يلي:

– يتم الانطلاق من الخانة التي هي في الركن الشمالي الغربي، وذلك بملأ أكبر عدد من الوحدات مراعيا في ذلك الكميات المتاحة من المنابع والمطلوبة من المصبات؛

– إذا كانت الكمية المتاحة تساوي الصفر بعد التشغيل أي ذلك الصف أصبح مشبعا، فيتم الانتقال عموديا إلى الأسفل.

التمرين رقم 29:

شركة تجارية لديها 3 مخازن وأربع مراكز تسويق والجدول التالي يوضح كل من (تكلفة نقل الوحدة الواحدة من للسلع من المخازن– حجم كل مخزون – احتياجات كل مركز):

S\D	D1	D2	D3	D4	العرض
S1	10	8	6	4	1500
S2	14	4	3	2	1000
S3	18	7	11	9	1500
الطلب	750	1750	250	1250	4000

المطلوب: اوجد الحل الأمثل لمشكلة النقل الذي يحقق اقل تكلفة باستعمال طريقة التكلفة الدنيا؟

حل التمرين:

	مصب 1	مصب 2	مصب 3	مصب 4	العرض
منبع 1	10 750	8 − 250	6 250	4 + 250	1500
منبع 2	14	4 +	3	2 − 1000	**1000**
منبع 3	18	7 1500	11	9	**1500**
الطلب	750	1750	250	1250	**4000**

عدد الخلايا الممتلئ هي 6 فتتحقق المعادلة 6 = 1−3+4

$$c = 10 \times 750 + 8 \times 250 + 6 \times 250 + 4 \times 250 + 2 \times 1000 + 7 \times 1500$$

$$c = 7500 + 2000 + 1500 + 1000 + 2000 + 10500 = 24500$$

التحقق من هذا الحل الأساسي هل هو أمثل أو لا.

$U_1 + v_1 = 10$ $U_2 + v_4 = 2$

$U_1 + v_2 = 8$ $U_3 + v_2 = 7$

$U_1 + v_3 = 6$

$U_1 + v_4 = 4$

نفرض $U_1 = 0$ وبعد ذلك نعوض في كل مرة في معادلة، فنحدد أحد المجاهيل فنجد ما يلي:

$v_1 = 10$ $v_2 = 8$ $v_3 = 6$ $v_4 = 4$ $U_2 = -2$ $U_3 = -1$

ثم نقوم بحساب التكلفة الحدية للخلايا الغير داخلة في الحل الأساسي

$$\delta ij = c_{ij} - u_i - v_j$$

$$\delta_{21} = c_{21} - u_2 - v_1 = 14 + 2 - 10 = 6$$

$\delta_{22} = c_{22} - u_2 - v_2 = 4 + 2 - 8 = -2$

$\delta_{23} = c_{23} - u_2 - v_3 = 3 + 2 - 6 = -1$

$\delta_{31} = c_{31} - u_3 - v_1 = 18 + 1 - 10 = 9$

$\delta_{33} = c_{33} - u_3 - v_3 = 11 + 1 - 6 = 6$

$\delta_{34} = c_{34} - u_3 - v_4 = 9 + 1 - 4 = 6$

هذا الحل ليس أمثل لوجود تكلفة حدية ليست موجبة ولا معدومة فيجب الانتقال إلى حل أساسي ثاني

الخانتان اللتان فيها إشارة سالبة. القيمتان اللتان فيهما هما 1000 و250 فنختار الأقل أي 250.

	مصب 1	مصب 2	مصب 3	مصب 4	**العرض**
منبع 1	10 750	8	6 − 250	4 + 500	1500
منبع 2	14	4 250	3 +	2 − 750	**1000**
منبع 3	18	7 1500	11	9	**1500**
الطلب	750	1750	250	1250	**4000**

عدد الخلايا الممتلئ هي 6 فتتحقق المعادلة 6 = 1−3+4

$c = 10 \times 750 + 6 \times 250 + 4 \times 500 + 4 \times 250 + 2 \times 750 + 7 \times 1500$

$c = 7500 + 1500 + 2000 + 1000 + 1500 + 10500 = 24000$

التحقق من هذا الحل الأساسي هل هو أمثل أو لا.

$U_1 + v_1 = 10$ $U_2 + v_2 = 4$

$U_1 + v_3 = 6$ $U_2 + v_4 = 2$

$U_1 + v_4 = 4$ $U_3 + v_2 = 7$

نفرض $U_1 = 0$ وبعد ذلك نعوض في كل مرة في معادلة، فنحدد أحد المجاهيل، فنجد ما يلي:

$v_1 = 10 \quad v_3 = 6 \quad v_4 = 4 \quad v_2 = 6 \quad U_2 = -2 \quad U_3 = 1$

ثم نقوم بحساب التكلفة الحدية للخلايا الغير داخلة في الحل الأساسي

$\delta ij = c_{ij} - u_i - v_j$

$\delta_{12} = c_{12} - u_1 - v_2 = 8 - 0 + 6 = 2$

$\delta_{21} = c_{21} - u_2 - v_1 = 14 + 2 - 10 = 6$

$\boldsymbol{\delta_{23} = c_{23} - u_2 - v_3 = 3 - 2 + 6 = -1}$

$\delta_{31} = c_{31} - u_3 - v_1 = 18 - 1 - 10 = 7$

$\delta_{33} = c_{33} - u_3 - v_3 = 11 - 1 - 6 = 4$

$\delta_{34} = c_{34} - u_3 - v_4 = 9 - 1 - 4 = 4$

	مصب 1	مصب 2	مصب 3	مصب 4	**العرض**
منبع 1	10 750	8	6	4 750	1500
منبع 2	14	4 250	3 **250**	2 500	**1000**
منبع 3	18	7 1500	11	9	**1500**
الطلب	750	1750	250	1250	**4000**

عدد الخلايا الممتلئ هي 6 فتتحقق المعادلة $6 = 1-3+4$

$c = 10 \times 750 + 4 \times 750 + 4 \times 250 + 3 \times 250 + 2 \times 500 + 7 \times 1500$

$c = 7500 + 3000 + 1000 + 750 + 1000 + 10500 = 23750$

التحقق من هذا الحل الأساسي هل هو أمثل أو لا.

$U_1 + v_1 = 10$ $\quad\quad$ $U_2 + v_3 = 3$

$U_1 + v_4 = 4$ $\quad\quad$ $U_2 + v_4 = 2$

$U_2 + v_2 = 4$ $\quad\quad$ $U_3 + v_2 = 7$

نفرض $U_1 = 0$ وبعد ذلك نعوض في كل مرة في معادلة، فنحدد أحد المجاهيل، فنجد ما يلي:

$v_1 = 10$ $\quad$ $v_4 = 4$ $\quad$ $v_2 = 6$ $\quad$ $v_3 = 5$ $\quad$ $U_2 = -2$ $\quad$ $U_3 = 1$

ثم نقوم بحساب التكلفة الحدية للخلايا الغير داخلة في الحل الأساسي

$\delta ij = c_{ij} - u_i - v_j$

$\delta_{12} = c_{12} - u_1 - v_2 = 8 - 0 - 6 = 2$

$\delta_{13} = c_{13} - u_1 - v_3 = 6 - 0 - 5 = 1$

$\delta_{21} = c_{21} - u_2 - v_1 = 14 + 2 - 10 = 6$

$\delta_{31} = c_{31} - u_3 - v_1 = 18 - 1 - 10 = 7$

$\delta_{33} = c_{33} - u_3 - v_3 = 11 - 1 - 5 = 5$

$\delta_{34} = c_{34} - u_3 - v_4 = 9 - 1 - 4 = 4$

هذا الجدول أمثل لأن كل قيم التكلفة الحدية موجبة وإلا معدومة.

فيجب نقل 750 وحدة من المنبع 1 إلى المصب 1 و 750 وحدة من المنبع 1 إلى المصب 4 و 250 وحدة من المنبع 2 إلى المصب 2 و250 وحدة من المنبع 2 إلى المصب 3 و500 وحدة من المنبع 2 إلى المصب 4 و1500 وحدة من المنبع 3 إلى المصب 2 وهذا ما يمكن المؤسسة من تقليل التكلفة إلى 23750 دج.

التمرين رقم 30:

شركة تجارية لديها 3 مخازن و3 مراكز تسويق والجدول التالي يوضح كل من (تكلفة نقل الوحدة الواحدة من للسلع من المخازن– حجم كل مخزون – احتياجات كل مركز):

S\D	D1	D2	D3	العرض
S1	6	4	2	**650**
S2	**4**	5	6	**600**
S3	**8**	**7**	3	**500**
الطلب	700	**750**	300	**1750**

المطلوب: اوجد الجدول الأساسي الأول لمشكلة النقل الذي يحقق اقل تكلفة باستعمال طريقة فوجل؟

حل التمرين:

	S\D	D1	D2	D3	العرض
2 = (2-4)	S1	6	4	2	**650**
1 = (4-5)	S2	**4**	5	6	**600**
4 = (3-7)	S3	**8**	**7**	3 300	**500**
	الطلب	700	**750**	300	**1750**
		2 =(4-6)	1 =(4-5)	1 = (2-3)	

	S\D	D1	D2	D3	العرض
2 = (4-6)	S1	6	4 650	2	650
1 = (4-5)	S2	**4**	5	6	600
1 = (7-8)	S3	**8**	**7**	3 300	500
	الطلب	700	**750**	300	**1750**
		2 =(4-6)	1 =(4-5)		

	S\D	D1	D2	D3	العرض
	S1	6	4 650	2	650
1 = (4-5)	S2	**4** 600	5	6	600
1 = (7-8)	S3	**8**	**7**	3 300	500
	الطلب	700	**750**	300	**1750**
		4 =(4-8)	2 =(5-7)		

	S\D	D1	D2	D3	العرض
	S1	6	4 650	2	650
	S2	4 600	5	6	600
1 = (7-8)	S3	8 100	7 100	3 300	500
	الطلب	700	750	300	1750

هذا هو الجدول الأساسي الأول وفيه 5 خانات مملوء والذي يساوي 3+3−1= 5

التمرين رقم 31:

ليكن الجدول التالي الذي يوضح كل من (تكلفة نقل الوحدة الواحدة من للسلع من المخازن– كمية عرض كل منبع – كمية طلب كل مصب):

S\D	D1	D2	D3	D4	العرض
S1	7	8	3	4	130
S2	12	4	9	3	1370
S3	9	7	11	9	1890
S4	7	4	2	15	430
S5	3	7	9	12	3000
الطلب	690	1440	2410	2280	6820

المطلوب: اوجد الجدول الأساسي الأول لمشكلة النقل الذي يحقق اقل تكلفة باستعمال طريقة الركن الشمالي الغربي؟

الحل:

S\D	D1	D2	D3	D4	العرض
S1	7 **130**	8	3	4	130
S2	12 **560**	4 **810**	9	3	**1370**
S3	9	7 **630**	11 **1260**	9	**1890**
S4	7	4	2 **430**	15	**430**
S5	3	7	9 **720**	12 **2280**	**3000**
الطلب	690	**1440**	2410	2280	**6820**

عدد الخليا المملوء هو 8 ويساوي 1- 4 + 5

ثانيا: حل مسائل النقل في حالة تعظيم الأرباح

صيغة البرمجة الخطية للمسألة:

افتراض أن الربح المحصل عليه جراء نقل وحدة واحدة من المنبع i إلى المصب j هو p_{ij} والكميات المنقولة هي x_{ij} و a_i هي كميات العرض لكل منبع و b_j هي كميات الطلب لكل مصب، فيكون البرنامج الخطي الرياضي للمسألة النقل على الشكل التالي:

$$\text{Max } \pi = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} p_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_i$$

$$X_{ij},\ p_{ij} \geq 0$$

حيث m هو عدد المنابع و n هو عدد المصبات.

طرق حل مسألة النقل في حالة تعظيم الأرباح

1- طريقة أعلى عائد

يجب القيام بما يلي:

يتم إيجاد الحل الأساسي الأول بطريقة أعلى عائد، حيث يتم ملأ الخلايا من الأكبر فالمساوي فالأقل وهكذا؛

نحصل على الحل الأمثل لما تعطي جميع الخلايا الغير داخلة في الحل عوائد حدية δij سالبة أو معدومة بحيث

$$\delta ij = p_{ij} - u_i - v_j$$

الخلية التي تدخل للحل الأساسي هي التي تعطي أكبر عائد حدي موجب.

2- طريقة فوجل:

نتبع كل الخطوات كما في حالة التقليل، والاختلاف فقط يكون في ما يلي:[1]

- حساب الفرق بين أكبر ربحين في جدول الأرباح؛
- اختار الخلية ذات الربح الأعلى.

[1] فتيحة بلجيلالي، مصدر سبق ذكره، ص 119.

التمرين رقم 32:

هذا الجدول يلخص المعلومات لعملية نقل لبضاعة من 4 منابع إلى 4 مصبات، وذلك بتوضيح الأرباح الوحدوية، فحدد الكميات التي يجب نقلها وذلك لتحقيق أكبر ربح والذي يطلب تحديد قيمته بإستعمال طريقة أعلى عائد؟

	مصب 1	مصب 2	مصب 3	مصب 4	**العرض**
منبع 1	3	13	10	6	320
منبع 2	7	9	11	9	**270**
منبع 3	8	7	6	2	**600**
منبع 4	2	5	4	8	**120**
الطلب	260	370	460	220	**1310**

الحل:

	مصب 1	مصب 2	مصب 3	مصب 4	**العرض**
منبع 1	3	13 320	10	6	320
منبع 2	7	9	11 − 270	9 +	**270**
منبع 3	8 260	7 50	6 + 190	2 − 100	**600**
منبع 4	2	5	4	8 120	**120**
الطلب	260	370	460	220	**1310**

عدد الخلايا الممتلئ هي 7 فتتحقق المعادلة 7= 1−4+4

$$\pi = 13 \times 320 + 11 \times 270 + 8 \times 260 + 7 \times 50 + 6 \times 190 + 2 \times 100 + 8 \times 120$$

$$\pi = 4160 + 2970 + 2080 + 350 + 1140 + 200 + 960 = 11860$$

التحقق من هذا الحل الأساسي هل هو أمثل أو لا.

$U_1 + v_2 = 13$ $U_2 + v_3 = 11$

$U_3 + v_1 = 8$ $U_3 + v_2 = 7$

$U_3 + v_3 = 6$ $U_3 + v_4 = 2$

$U_4 + v_4 = 8$

نفرض $U_1 = 0$ وبعد ذلك نعوض في كل مرة في معادلة، فنحدد أحد المجاهيل، فنجد ما يلي:

$v_2 = 13$ $U_3 = -6$ $v_3 = 12$ $U_2 = -1$ $v_1 = 14$ $v_4 = 8$ $U_4 = 0$

ثم نقوم بحساب العوائد الحدية للخلايا الغير داخلة في الحل الأساسي

$$\delta ij = p_{ij} - u_i - v_j$$

$$\delta_{11} = p_{11} - u_1 - v_1 = 3 - 0 - 14 = -11$$

$$\delta_{13} = p_{13} - u_1 - v_3 = 10 - 0 - 12 = -2$$

$$\delta_{14} = p_{14} - u_1 - v_4 = 6 - 0 - 8 = -2$$

$$\delta_{21} = p_{21} - u_2 - v_1 = 7 + 1 - 14 = -6$$

$$\delta_{22} = p_{22} - u_2 - v_2 = 9 + 1 - 13 = -3$$

$$\boldsymbol{\delta_{24} = p_{24} - u_2 - v_4 = 9 + 1 - 8 = 2}$$

$$\delta_{41} = p_{41} - u_4 - v_1 = 2 - 0 - 14 = -12$$

$$\delta_{42} = p_{42} - u_4 - v_2 = 5 - 0 - 13 = -8$$

$$\delta_{43} = p_{43} - u_4 - v_3 = 4 - 0 - 12 = -8$$

هذا الحل ليس أمثل لوجود عائد حدي ليس سالب ولا معدوم فيجب الانتقال إلى حل أساسي ثاني

الخانتان اللتان فيها إشارة سالبة القيمة التي فيهما هما 100 و270 فنختار الأقل أي 100.

	مصب 1	مصب 2	مصب 3	مصب 4	العرض
منبع 1	3	13 320	10	6	320
منبع 2	7	9	11 170	9 100	**270**
منبع 3	8 260	7 50	6 290	2	**600**
منبع 4	2	5	4	8 120	**120**
الطلب	260	370	460	220	**1310**

عدد الخلايا الممتلئ هي 7 فتتحقق المعادلة 7= 1−4+4

$$\pi = 13 \times 320 + 11 \times 170 + 9 \times 100 + 8 \times 260 + 7 \times 50 + 6 \times 290 + 8 \times 120$$

$$\pi = 4160 + 1870 + 900 + 2080 + 350 + 1740 + 960 = 12060$$

مع ملاحظة أن $12060 \leq 11860$

التحقق من هذا الحل الأساسي هل هو أمثل أو لا.

$U_1 + v_2 = 13$ $U_2 + v_3 = 11$

$U_2 + v_4 = 9$ $U_3 + v_1 = 8$

$U_3 + v_2 = 7$ $U_3 + v_3 = 6$

$U_4 + v_4 = 8$

نفرض $U_1 = 0$ وبعد ذلك نعوض في كل مرة في معادلة، فنحدد أحد المجاهيل فنجد ما يلي:

$u_2 = -1$ $U_3 = -6$ $v_4 = 10$ $v_1 = 14$ $v_2 = 13$ $v_3 = 12$ $U_4 = -2$

ثم نقوم بحساب العوائد الحدية للخلايا الغير داخلة في الحل الأساسي

$\delta ij = p_{ij} - u_i - v_j$

$\delta_{11} = p_{11} - u_1 - v_1 = 3 - 0 - 14 = -11$

$\delta_{13} = p_{13} - u_1 - v_3 = 10 - 0 - 12 = -2$

$\delta_{14} = p_{14} - u_1 - v_4 = 6 - 0 - 10 = -4$

$\delta_{21} = p_{21} - u_2 - v_1 = 7 + 1 - 14 = -6$

$\delta_{22} = p_{22} - u_2 - v_2 = 9 + 1 - 13 = -3$

$\delta_{34} = p_{34} - u_3 - v_4 = 2 + 6 - 10 = -2$

$\delta_{41} = p_{41} - u_4 - v_1 = 2 + 2 - 14 = -10$

$\delta_{42} = p_{42} - u_4 - v_2 = 5 + 2 - 13 = -6$

$\delta_{43} = p_{43} - u_4 - v_3 = 4 + 2 - 12 = -6$

هذا الحل أمثل لأن كل العوائد الحدية سالبة أو معدومة

فيجب نقل 320 وحدة من المنبع 1 إلى المصب 2 و 170 وحدة من المنبع 2 إلى المصب 3 و100 وحدة من المنبع 2 إلى المصب 4 و260 وحدة من المنبع 3 إلى المصب 1 و50 وحدة من المنبع 3 إلى المصب 2 و290 وحدة من المنبع 3 إلى المصب 3 و120 وحدة من المنبع 4 إلى المصب 4، فيتحقق ربح قدره 12060 دج.

ثالثا: حالات خاصة في حل مسائل النقل

1- حالة عدم تساوي الطلب مع العرض: وفي هذه الحالة يتم إضافة صف وهمي إذا كان مجموع الطلبات أكبر من مجموع العروض، أو إضافة عمود وهمي إذا كان مجموع العروض أكبر من مجموع الطلبات، وتكون تكلفة النقل في كل خلايا الصف او العمود الوهمي تساوي الصفر وإجمال الطلبأو العرض فيه يساوي الفرق بين العرض والطلب، الأكبر ناقص الأصغر، فيصبح جدول النقل عادي ويتم السعي لإيجاد الحل الأمثل، وعند الوصول إليه يتم تفسير القيمة الموجودة في الصف أو العمود الوهمي بأنه يتم البحث عن مصادر أخرى أو بأنه يتم البحث عن مصبات أخرى[1].

[1] علي العلاونة، محمد عبيدات وعبد الكريم عواد، مصدر سبق ذكره، ص ص 280- 287.

2- حالة الانحراف (حالة عدم الانتظام): وتحدث لما يكون عدد الخلايا المملوء أقل من $(m + n - 1)$

فيلزم لإتمام الحل وضع في خلية أو خلايا فارغة كمية صغيرة جدا (£) بشرط لا تشكل مسار مغلق مع بقية الخانات المملوء، وذلك حتى يتساوى عدد الخلايا المملوء مع $(m + n - 1)$. مع ملاحظة أن حالة عدم الانتظام قد تكون في الجدول الأساسي الأول أو في أحد الجداول الأخرى وذلك في حالة التساوي بين أصغر كميتين في خانتين فيهما إشارة ناقص في المسار المغلق أي وجود أكثر من متغيرة تخرج من الأساس في نفس الوقت[1].

3- حالة الطرق الممنوعة: أي لا يمكن نقل بضاعة من مصدر معين إلى مصب معين، فحينها يتم وضع تكلفة كبيرة جدا (m) في الخلية المعنية في حالة جدول فيه تكاليف، أو وضع ربح صغير جدا (£) في حالة جدول فيه أرباح.

التمرين رقم 33:

هذا الجدول يلخص المعلومات لعملية نقل لبضاعة من 2 منابع إلى 3 مصبات، وذلك بتوضيح الأرباح الوحدوية، فحدد الكميات التي يجب نقلها وذلك لتحقيق أكبر ربح والذي يطلب تحديد قيمته؟

	مصب 1	مصب 2	مصب 3	**العرض**
منبع 1	8	11	10	1500
منبع 2	11	10	12	**1600**
الطلب	600	650	750	

الحل:

نلاحظ أن العرض الكلي أكبر من الطلب الكلي ومنه يجب إضافة عمود وهمي كل الأرباح الوحدوية فيه تساوي الصفر وطلبه يساوي العرض الكلي ناقص الطلب الكلي.

[1] مخوخ رزيقة، (2019): رياضيات المؤسسة 02، مطبوعة لقسم العلوم التجارية، جامعة محمد بوضياف، المسيلة، ص 43.

العرض الوهمي = (1500 + 1600) – (600 + 650 + 750)

= 3100 – 2000 = 1100

	مصب 1	مصب 2	مصب 3	مصب 4	**العرض**
منبع 1	8	11 650	10	0 850	1500
منبع 2	11 600	10	12 750	0 250	**1600**
الطلب	600	650	750	1100	**3100**

عدد الخلايا الممتلئ هي 5 فتتحقق المعادلة 5 = 1−4+2

$\pi = 11 \times 650 + 0 \times 850 + 11 \times 600 + 12 \times 750 + 0 \times 250$

$\pi = 7150 + 0 + 6600 + 9000 + 0 = 22750$

التحقق من هذا الحل الأساسي هل هو أمثل أو لا.

$U_1 + v_2 = 11$ $U_2 + v_3 = 12$

$U_1 + v_4 = 0$ $U_2 + v_4 = 0$

$U_2 + v_1 = 11$

نفرض $U_1 = 0$ وبعد ذلك نعوض في كل مرة في معادلة، فنحدد أحد المجاهيل فنجد ما يلي:

$v_2 = 11$ $v_4 = 0$ $U_2 = 0$ $v_3 = 12$ $v_1 = 11$

ثم نقوم بحساب العوائد الحدية للخلايا الغير داخلة في الحل الأساسي

$\delta ij = p_{ij} - u_i - v_j$

$\delta_{11} = p_{11} - u_1 - v_1 = 8 - 0 - 11 = -3$

$\delta_{13} = p_{13} - u_1 - v_3 = 10 - 0 - 12 = -2$

$\delta_{22} = p_{22} - u_2 - v_2 = 10 - 0 - 11 = -1$

هذا الحل أمثل لأن كل العوائد الحدية سالبة أو معدومة

فيجب نقل 650 وحدة من المنبع 1 إلى المصب 2 و 850 وحدة من المنبع 1 إلى مصبات أخرى، و600 وحدة من المنبع 2 إلى المصب 1 و750 وحدة من المنبع 2 إلى المصب 3 و250 وحدة من المنبع 2 إلى مصبات أخرى، فيتحقق ربح قدره 22750 دج.

التمرين رقم 34:

هذا الجدول يبين قيمة الأرباح الوحدوية وطلب كل المصبات والكمية المعروضة من كل منبع

	مصب 1	مصب 2	مصب 3	مصب 4	**العرض**
منبع 1	3	8	10	4	400
منبع 2	2	9	3	9	**600**
منبع 3	5	4	6	2	**800**
الطلب	500	**500**	**200**	600	**1800**

المطلوب: تحديد الجدول الأساسي الأول لعملية النقل باستعمال طريقة فوجل؟

الحل:

	مصب 1	مصب 2	مصب 3	مصب 4	**العرض**
منبع 1	3 200	8	10 200	4	400
منبع 2	2	9 £	3	9 600	**600**
منبع 3	5 300	4 500	6	2	**800**
الطلب	500	**500**	**200**	600	**1800**

بما أن عدد الخانات المملوء هو 5 وهو اقل من 6 = 1−3+4، ومنه نحن في حالة عدم انتظام فيجب وضع في خلية أو خلايا فارغة كمية صغيرة جدا (£) بشرط لا تشكل مسار مغلق مع بقية الخانات المملوء.

التمرين رقم 35:

أوجد الجدول الأساسي الأول باعتبار أن هذا الجدول هو يمثل الإرباح الوحدوية، مع العلم المنع الثاني لظروف قاهرة لا يمكنه أن يعطي للمصب الثالث، وكذلك المنبع الثالث لا يقدم أي سلعة إلى المصب الرابع، وذلك باستعمال طريقة أعلى عائد.

	مصب 1	مصب 2	مصب 3	مصب 4	**العرض**
منبع 1	8	3	4	3	1700
منبع 2	12	4	8	7	**900**
منبع 3	11	7	11	9	**1100**
الطلب	800	1300	200	1400	**3700**

الحل:

	مصب 1	مصب 2	مصب 3	مصب 4	**العرض**
منبع 1	8	3 400	4	3 1300	1700
منبع 2	12 800	4	£	7 100	**900**
منبع 3	11	7 900	11 200	£	**1100**
الطلب	800	1300	200	1400	**3700**

عدد الخانات المملوء هو 6 و يساوي 1−3+4 فهذا الجدول يسمح بالاستمرار في الحل، لكن هو المطلوب.

الفصل السادس: مدخل إلى البرمجة غير الخطية

الاختلاف بين البرمجة الخطية وغير الخطية هو أنه في البرمجة الخطية الحل الأمثل يتم تحديده من خلال إيجاد قيم قابلة للتجسيد لكونها قيم ثابة للمتغيرات الحقيقية والصناعية، أما في البرمجة الغير خطية فلا يمكن تحقيق ذلك، بل يتم الاكتفاء بالوصول إلى حل غير متطرف أو إلى حل داخلي. فيمكن أن يكون لدينا حل أمثلي داخلي يختلف عن الحل الأمثل العام مع ملاحظة أن هذا المشكل لا يكون عندما تكون منطقة الحلول الممكنة محدبة[1]. البرمجة غير الخطية تكون فيها دالة الهدف أو القيود أو كلاهما غير خطية ومن بينها ما يلي:[2]

أولا: البرمجة غير خطية ذات المتغير الواحد بقيود تشغيلية

البرنامج غير الخطي، غير المقيد للمتغير المفرد يأخذ هذه الصيغة $y = f(x)$ بحيث $f(x)$ دالة غير خطية، بحيث يكون البحث عن الأمثلية في المجال الغير محدد $]-\infty , +\infty[$ أما إذا كان المجال مقيد $[a , b]$ فإن شكل المسألة يكون كما يلي:

$$y = f(x)$$

$$a \leq x \leq b$$

وفيها يتم البحث عن حل الدالة

$$Z = f(x)$$

وهناك قسمين رئيسيين لإيجاد النقطة المثلى وهما:

1-1: البحث الخطي بدون استخدام المشتقات

يعتمد عليه لما تكون دالة الهدف غير معروفة في صورة رياضية أو يكون الحصول على النقطة الساكنة جبريا مستحيلا ومنه يتم استخدام طرق عددية لتقريب المكان الأمثل.

---

[1] Belloufi abde rahim, (2008): Optimisation du processus d'usinage à l'aide de la programmation non linéaire (P.N.L), mémoire magistère, université mohammed khidre :biskra, p 7.

[2] بن جلول خالد، (2017): مطبوعة بداغوجية في رياضيات المؤسسة، قالمة، الجزائر، ص 77.

1-2: البحث الخطي باستعمال المشتقات

حتى يتم إيجاد حل، فيجب أن تكون الدوال تفاضلية أي أنها تقبل مشتقة معروفة وهي $f^{\backslash}(x)$، فيكون لدينا ثلاث حالات وهي:

1) إذا كانت $f^{\backslash}(x) = 0$ فهذا يعني أن x_0 هي نقطة التصغير ؛

2) إذا كانت $f^{\backslash}(x) > 0$ ومنه $(x - x_0)\ f^{\backslash}(x_0) > 0$ أي أن $f(x) \geq f(x_0)$ فتكون نقطة التصغير تقع على يسار x_0؛

3) إذا كانت $f^{\backslash}(x) < 0$ ومنه $(x - x_0)\ f^{\backslash}(x_0) < 0$ أي أن $f(x) \leq f(x_0)$ فتكون نقطة التصغير تقع على يمين x_0.

التمرين رقم 36:

$\max Z = -x^4 + 5X^3 + X + 1$

$x^2 - 9 \leq 0$

هو عدد العمال X

$x \geq 0$

الحل:

نلاحظ انه لا يمكن تحديد النقطة الساكنة لأن مساواة مشتقة الدالة بالصفر من الصعب جدا حل هذه المعادلة.

فالمجال المقبول للقيد التشغيلي هو [3 . -3] وحسب قيد عدم سالبية المتغيرات، فالمجال المقبول بعد التقاطع [3 . 0] وبما أن X هو عدد العمال فهو عددا طبيعيا ومنه القيم المقبولة هي 0 . 1 . 2 . 3

فنعتمد على طريقة التعويض البسيطة

$\max Z = -0^4 + 5 \times 0^3 + 0 + 1 = 1$

$\max Z = -1^4 + 5 \times 1^3 + 1 + 1 = 6$

$\max Z = -2^4 + 5 \times 2^3 + 2 + 1 = 27$

$\max Z = -3^4 + 5 \times 3^3 + 3 + 1 = 58$

ومنه عدد العمال الذي يعظم الربح ضمن القيود هو 3 عمال.

التمرين رقم 37:

حدد نقطة التصغير وقيمة التكلفة عندها؟

$\text{Min } c = 3x^2 - 6x + 9$

$3x - 2 \geq 1$

$x \geq 0$

الحل:

حسب القيد التشغيلي فالمجال المقبول هو $[1 . +\infty[$ وهو مقبول كذلك حسب قيد عدم سالبية المتغيرات

نقوم باشتقاق دالة الهدف ومساواة المشتقة للصفر فنحدد النقطة الساكنة

$f'(x) = 6x - 6 = 0$

$x = 1$

$\text{Min } c = 3 \times 1^2 - 6 \times 1 + 9 = 6$

ثانيا: البرمجة غير الخطية وبدون قيود تشغيلية[1]

لإيجاد حل للمسألة تعظيم أو تقليل غير مقيدة، فإنه يجب إيجاد قيمة مناسبة لـ ($x_1, x_2, \ldots, x_n$) x بغية تكبير أو تصغير دالة الهدف (x) f مع كون مجموعة القيود هي مجموعة خالية.

بحيث إذا كانت جميع المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية معروفة للدالة (x) f فإن الشرط الضروري لكي تكون النقطة $x = x^*$ نقطة حدية هو $\frac{\partial f}{\partial x1} = \frac{\partial f}{\partial x2} = \ldots = \frac{\partial f}{\partial xn} = 0$

أما الشرط الكافي هو أن تكون لمصفوفة المشتقات الجزئية الثانية أي المصفوفة الهيسية المحسوبة عند x^* إحدى الخاصيتين التاليتين:

أ) مؤكدة الإيجاب أي جميع z موجبة عندما تكون x^* نقطة تصغير او

ب) مؤكدة الساليبية أي جميع z سالبة عندما تكون x^* نقطة تكبير.

ملاحظة: إذا كانت بعض z أي الجذور الناتجة مختلفة الإشارة فأن نقطة التوازن ليست عظمى وليست نقطة صغرى.

و z تحصب من خلال المعادلة التالية

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial 2f}{\partial x1\ \partial x1} - z & \frac{\partial 2f}{\partial x1\ \partial x2} & \frac{\partial 2f}{\partial x1\ \partial x3} & \frac{\partial 2 \text{ القيد الأول}}{\partial x1\ \partial x1} & \frac{\partial 2 \text{ القيد الثاني}}{\partial x2\ \partial x1} \\ \frac{\partial 2f}{\partial x2\ \partial x1} & \frac{\partial 2f}{\partial x2\ \partial x2} - z & \frac{\partial 2f}{\partial x2\ \partial x3} & \frac{\partial 2 \text{ القيد الأول}}{\partial x1\ \partial x2} & \frac{\partial 2 \text{ القيد الثاني}}{\partial x2\ \partial x2} \\ \frac{\partial 2f}{\partial x3\ \partial x1} & \frac{\partial 2f}{\partial x3\ \partial x2} & \frac{\partial 2f}{\partial x3\ \partial x3} - z & \frac{\partial 2 \text{ القيد الأول}}{\partial x1\ \partial x3} & \frac{\partial 2 \text{ القيد الثاني}}{\partial x2\ \partial x3} \\ \frac{\partial 2 \text{ القيد الأول}}{\partial x1\ \partial x1} & \frac{\partial 2 \text{ القيد الأول}}{\partial x1\ \partial x2} & \frac{\partial 2 \text{ القيد الأول}}{\partial x1\ \partial x3} & 0 & 0 \\ \frac{\partial 2 \text{ القيد الثاني}}{\partial x2\ \partial x1} & \frac{\partial 2 \text{ القيد الثاني}}{\partial x2\ \partial x2} & \frac{\partial 2 \text{ القيد الثاني}}{\partial x2\ \partial x3} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

[1] أحمد علي أحمد رضوان وعبد الرحمن محمد سليمان، (2001): تقنيات الأمثلية في البرمجة غير الخطية، النشر العلمي والمطابع لجامعة الملك سعود، الرياض، السعودية، ص ص 86- 90.

التمرين رقم 38:

أوجد النهاية العظمى للدالة التالية

$$\text{Max rt} = 3\ x_1x_2 + 2\ x_1x_3 - 2\ x_2x_3 - 4\ x_1$$

حسب الشرط الكافي فإن:

$$\frac{\partial f}{\partial x1} = 3\ x_2 + 2\ x_3 - 4 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x2} = 3\ x_1 - 2\ x_3 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x3} = 2\ x_1 - 2\ x_2 = 0$$

نقوم بحل جملة ثلاث معادلات

من المعادلة الثانية والثالثة نجد

$$x_1 = 2/3 \quad x_3 = x_2$$

نعوض في المعادلة الأولى

$$3 \times 2/3\ x_3 + 2\ x_3 - 4 = 0$$

$$4\ x_3 - 4 = 0$$

$$x_3 = 1 \qquad x_1 = x_2 = 2/3$$

ثم ننتقل إلى الشرط اللازم

ليست هناك قيود فقيم المصفوفة تكون كما يلي:

$$H \begin{vmatrix} -z & 3 & 2 \\ 3 & -z & 2 \\ 2 & -2 & -z \end{vmatrix} = 0$$

تحديد قيم z من خلال حساب محدد المصفوفة

$$\text{Det h} = -z(z^2+4) - 3(-3z-4) + 2(-6+2z)$$

$$= -z^3 + 9z = -z(z^2-9) = 0$$

$$Z_1 = 0 \qquad z_2 = -3 \qquad z_3 = 3$$

المصفوفة الهيسية ليست مؤكدة السالبية وكذلك ليست مؤكدة الإيجاب لأن إشارة z تتغير ومنه فهي نقطة سرج أي لا يمكن تحديد طبيعة النهاية صغرى أو كبرى.

ثالثا: البرمجة غير الخطية متعددة المتغيرات وبقيود معادلات[1]

بحيث يتم البحث عن تصغير أو تعظيم دالة الهدف والتي بها عدة متغيرات وقيودها بشكل معادلات وهناك طريقتين سيتم شرحهما لحل هذه المسألة هما التعويض المباشر وطريقة لاقرانج.

* طريقة التعويض المباشر

حيث يتم البدأ بتحديد عدد المتغيرات المستقلة والذي يساوي عدد المتغيرات في البرنامج ناقص عدد القيود، والمتغيرات الغير مستقلة فعددها يساوي عدد القيود وتحدد قيمها بحل جملة القيود.

التمرين رقم 39:

$$\text{Min } c = 2x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2$$

$$2x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 40$$

$$x_1 + 4x_3 = 6$$

[1] أحمد علي أحمد رضوان وعبد الرحمن محمد سليمان، المصدر نفسه، ص 134.

الحل:

هذه المسألة تحتوي على ثلاث متغيرات وقيدين ومنه يوجد متغير مستقل واحد، فيمكن حذف متغير من دالة الهدف، فمن القيد الثاني $x_1 = 6 - 4\ x_3$ فتصبح المسألة بالشكل الأتي

$$F = \text{Min } c = 2\ (6\ - 4\ x_3\ )^{\ 2} + 6\ x_2^{\ 2} + 4\ x_3^{\ 2}$$

$$F = \text{Min } c = 72 - 96\ x_3 + 36\ x_3^{\ 2} + 6\ x_2^{\ 2}$$

ويصبح فقط هناك قيد واحد

$$3\ x_2 - 2\ x_3\ = 14$$

$$\frac{\partial f}{\partial x2} = 12\ x_2 = 0 \qquad x_2 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x3} = -\ 96 + 72\ x_3 = 0 \qquad x_3 = \frac{4}{3}$$

$$x_1\ = 6\ - 4\ x_3 = 6\ - 4 \times \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

فالنقطة الحدية هي

$$(x_1\ ;\ x_2\ ;\ x_3\ )\ =\ \ \ (\frac{2}{3}\ ;\ 0\ ;\ \frac{4}{3})$$

* وطريقة لاقرانج:

هنا يتم إضافة متغيرة واحدة مقابلة لكل قيد، فيكون عدد النهائي للمجاهيل يساوي عدد القيود زائد عدد المجاهيل الأصلية في المسألة.

التمرين رقم 40:

$$\text{Min } c = 2\ x_1^{\ 2} + 6\ x_2^{\ 2} + 4\ x_3^{\ 2}$$

$$2\ x_1 + 6\ x_2 + 4\ x_3 = 12$$

$$x_1 + 4\ x_3 = 5$$

حل باستعمال طريقة لاقرانج

الحل:

شكل دالة لاقرانج يكون بالشكل التالي:

$$L(x_1, x_2, x_3, \partial_1, \partial_2) = 2x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 + \gamma_1(2x_1 + 6x_2 + 4x_3 - 12)$$

$$+ \gamma_2(x_1 + 4x_3 - 5)$$

نطبق الشرط الضروري وهو حساب جميع المشتقات الجزئية من الدرجة الأولي ثم نقوم بجعلها تساوي الصفر

$$\frac{\partial l}{\partial x1} = 4x_1 + 2\gamma_1 + \gamma_2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\frac{\partial l}{\partial x2} = 12x_2 + 6\gamma_1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots(2)$$

$$\frac{\partial l}{\partial x3} = 8x_3 + 4\gamma_1 + 4\gamma_2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots(3)$$

$$\frac{\partial l}{\partial \gamma 1} = 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 - 12 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots(4)$$

$$\frac{\partial l}{\partial \gamma 2} = x_1 + 4x_3 - 5 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots(5)$$

نحل جملة خمسة معادلات

من المعادلة (2) $\gamma_1 = -2\ x_2$

من المعادلة (5) $x_1 = 5 - 4\ x_3$ .....(6)

نعوض (6) في (4) نجد $2(6 - 4x_3) + 6x_2 + 4x_3 - 12 = 0$

$$12 - 8x_3 + 6x_2 + 4x_3 - 12 = 0$$

$$(7) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad X_2 = \frac{2}{3}\ x_3$$

من المعادلة (1) $\gamma_2 = -4\ x_1 - 2\gamma_1$

من المعادلة (3) $\gamma_2 = -2\ x_3 - \gamma_1$

(1) = (3) $-4\ x_1 - 2\gamma_1 = -2\ x_3 - \gamma_1$

$$-4(5 - 4x_3) - 2\gamma_1 = -2\ x_3 - \gamma_1$$

$$-2x_2 = \gamma_1 = -20 + 18x_3$$

$$x_2 = 10 - 9x_3 \ldots\ldots(8)$$

(8)= (7) $\frac{2}{3}\ x_3 = 10 - 9x_3$

$x_3 = \frac{30}{29}$ $X_2 = \frac{2}{3}\ x_3 = \frac{20}{29}$ $x_1 = 5 - 4\ x_4 = \frac{25}{29}$

$\gamma_1 = -20 + 18\ x_3 = \frac{-40}{29}$

$\gamma_2 = -2\ x_3 - \gamma_1 = \frac{-20}{29}$

التأكد من كون النهاية هي صغرى

نشكل مصفوفة التأكد

$$H = \begin{vmatrix} 4-z & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 12-z & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8-z & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Det h = $(4 - z)[(4 - z) \times 4 \times 0] + [6 \times (-6)] \times [(8 - z) \times 0 - (4 \times 4)]$

$$- 2 [(12 - z) \times 4 \times 0]$$

$$+ 1 [(12 - z) \times 4] \times [(2 \times 4) - (4 \times 1)] + [6 (8 - z) \times [(2 \times 0) - (6 \times 1)] = 0$$

$$Z = \frac{- 552}{139}$$

إشارة z لا تتغير وهي سالبة ومنه هذه النهاية هي عظمى

رابعا: البرمجة غير الخطية متعددة المتغيرات وبقيود متراجحة[1]

البرنامج غير الخطي، غير المقيد لأكثر من متغير يأخذ الصيغة الآتية $y = f (x)$ بحيث

$X = [x_1, x_2, x_3, \dots x_n]^t$ بحيث $f (x)$ دالة غير خطية لأكثر من متغير x، ويكون البحث عن الأمثلية (التعظيم) في جميع المراحل وفي المجال الغير مقيد $] - \infty , + \infty [$

وفيها يتم البحث عن قيم المتغيرات $x_1, x_2, \dots, x_n$ التي تصغر أو تكبر دالة الهدف

$Z = f (x)$ وذلك تحت القيود $g_j (x) \leq 0 , j = 1,2,3,\dots,m$

حيث تتحقق المتراجحة بتحقق المتساوية وذلك لكل قيمة حقيقية للمتغير u_j فتأخذ دالة لقرانج الصيغة التالية:

$$L (x, \lambda, y) = f (x) + \sum_{j=0}^{m} \lambda j (gj (x) - uj^{2})$$

فنطبق شروط لقرانج وهي

$$\frac{\partial l}{\partial xi} = \frac{\partial f}{\partial xi} + \sum_{j=0}^{m} \lambda j \frac{\partial gj}{\partial xi} = 0 \quad ,i= 1,2,\dots\dots,m \qquad (1)$$

$$\frac{\partial l}{\partial \lambda j} = g_j (x) - u_j^2 = 0 \quad ,j= 1,2,\dots\dots,m \qquad (2)$$

$$\frac{\partial l}{\partial uj} = - 2 \lambda j u_j = 0 \quad ,j= 1,2,\dots\dots,m \qquad (3)$$

[1] أحمد علي أحمد رضوان وعبد الرحمن محمد سليمان، المصدر نفسه، ص 188.

من المعادلة الأخيرة نتحصل على إما $\lambda j^* = 0$

او $u_j^* = 0$

او يكون $u_j^* = \lambda j^* = 0$

فيكون لدينا ثلاث حالات وهي:

1) إذا كان $\lambda j^* = 0$ و u_j^* لا يساوي الصفر ومن المعادلة (2) لدينا $(u_j^*)^2 = g_j (x^*) > 0$

فتتحول المعادلة (1) إلى $\frac{\partial l}{\partial xi} = \frac{\partial f}{\partial xi} = 0 \quad i= 1,2,\ldots\ldots,m$ وهو القيد الضروري في حالة مسائل البرمجة غير المقيدة.

2) إذا كان $u_j^* = 0$ و λj^* لا يساوي الصفر فتصبح المعادلة (2) من الشكل

$$\frac{\partial l}{\partial \lambda j} = g_j (x) = 0 \quad ,j= 1,2,\ldots\ldots,m \qquad (2)$$

فيكون الحل الأمثل على حدود القيد رقم j

ولكون λj^* لا يساوي الصفر فإن الحل الأمثل لا يحقق القيد الضروري

$$\frac{\partial f}{\partial xi} = 0 \quad i= 1,2,\ldots\ldots,m$$

3) إذا كان $\lambda j^* = u_j^* = 0$ لكل قيم j فإن $g_j (x) = 0$ وحينها يحقق الحل الأمثل العلاقة

$\frac{\partial f}{\partial xi} = 0 \quad i= 1,2,\ldots\ldots,m$ أي الحل الأمثل يقع على النقطة الحدية للقيود.

ملاحظة: العنصر المتمم u_j^2 هو دائما أكبر أو يساوي الصفر، فهو يساوي الطرف الذي في جهته المتراجحة أكبر ناقص الطرف الأخر، ويتم ضرب u_j^2 ناقص معادلة في λi المقابلة له و نضرب λi المقابلة لأي معادلة في الطرف الأول ناقص الطرف الثاني، فلا يكون حينها عنصر متمم.

التمرين رقم 41:

اوجد نهاية الدالة:

$$F (x_1, x_2) = 3 x_1^2 + 6 x_2^2 - 4 x_1 - 4 x_2 + 8$$

$$x_1 + 4 x_2 \leq 8$$

الحل:

أولا نعرف

$U^2 = 8 - x_1 - 4 x_2 \geq 0$

وشكل دالة لاقرانج في هذه الحالة هو

$L(x_1, x_2, \lambda, u) = 3 x_1^2 + 6 x_2^2 - 4 x_1 - 4 x_2 + 8 + \lambda (U^2 - 8 + x_1 + 4 x_2)$

وحسب شرط لاقرانج الضروري

$\frac{\partial l}{\partial x1} = 6 x_1 - 4 + \lambda = 0$ .....(1)

$\frac{\partial l}{\partial x2} = 12 x_2 - 4 + 4 \lambda = 0$ .....(2)

$\frac{\partial l}{\partial \lambda} = U^2 - 8 + x_1 + 4 x_2 = 0$ .....(3)

$\frac{\partial l}{\partial u} = 2 \lambda u = 0$ .....(4)

ونميز بين الحالات الثلاث السابقة

الحالة (1): إذا كان $u = 0$ و $\lambda \neq 0$ فإن الشرط الضروري للاقرانج يصبح بالشكل

$\frac{\partial l}{\partial x1} = 6 x_1 - 4 + \lambda = 0$ .....(1)

$\frac{\partial l}{\partial x2} = 12 x_2 - 4 + 4 \lambda = 0$ .....(2)

$\frac{\partial l}{\partial \lambda} = 8 + x_1 + 4 x_2 = 0$ .....(3)

$\lambda = 4 - 6 x_1$ من المعادلة (1)

$\lambda = 1 - 3 x_2$ من المعادلة (2)

(1) = (2) $x_2 = 2 x_1 - 1$ .....(4)

نعوض (4) في (3)

$8 + x_1 + 4(2x_1 - 1) = 0$ $\quad x_1 = -\frac{4}{9}$ $\quad x_2 = -\frac{17}{9}$ $\quad \lambda = -\frac{14}{3}$

$F(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 6x_2^2 - 4x_1 - 4x_2 + 8 = \frac{118}{3}$

الحالة الثانية $\lambda = 0$ و $u \neq 0$ فإن الشرط الضروري للاقرانج يصبح بالشكل

$\frac{\partial l}{\partial x1} = 6x_1 - 4 = 0$ .....(1) $\quad x_1 = \frac{2}{3}$

$\frac{\partial l}{\partial x2} = 12x_2 - 4 = 0$ .....(2) $\quad x_2 = \frac{1}{3}$

$\frac{\partial l}{\partial \lambda} = U^2 - 8 + x_1 + 4x_2 = 0$ .....(3) $\quad U^2 = 6$

$F(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 6x_2^2 - 4x_1 - 4x_2 + 8 = 6$

الحالة الثالثة $\lambda = 0$ =u فإن الشرط الضروري للاقرانج يصبح بالشكل

$\frac{\partial l}{\partial x1} = 6x_1 - 4 = 0$ .....(1) $\quad x_1 = \frac{2}{3}$

$\frac{\partial l}{\partial x2} = 12x_2 - 4 = 0$ .....(2) $\quad x_2 = \frac{1}{3}$

$\frac{\partial l}{\partial \lambda} = -8 + x_1 + 4x_2 = 0$ .....(3) $\quad -8 + \frac{2}{3} + 4\frac{1}{3} = -6 \neq 0$

ومنه في هذه الحالة لا يوجد حل

من خلال الحالات الثلاثة نستنتج انه توجد نهاية عظمى قدرها $\frac{118}{3}$ وتكون لما

$x_1 = -\frac{4}{9}$ $\quad x_2 = -\frac{17}{9}$

قائمة المراجع:

أولا: باللغة العربية

1. الجنابي حسين محمود، (2010): الأحدث في بحوث العمليات، دار حامد للنشر والتوزيع: عمان، الأردن.
2. الجواد دلال صادق والفتال حميد ناصر، (2008): بحوث العمليات، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع: عمان، الأردن.
3. الصمادي أحمد محمد الهزاع ، (2008): أساسيات بحوث العمليات، دار قنديل للنشر والتوزيع، الطبعة الأولى: عمان، الأردن.
4. العلاونة علي، عبيدات محمد و عواد عبد الكريم، (2005): بحوث العمليات في العلوم التجارية، مركز يزيد للنشر، الطبعة الأولى: عمان، الأردن.
5. المهتدين أكرم محمد عرفان (2004): الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية، دار صفاء للنشر والتوزيع: عمان، الأردن.
6. الموسوي عبد الرسول عبد الرزاق، (2009): المدخل إلى بحوث العمليات الطبعة الثالثة، دار وائل للنشر: عمان، الأردن.
7. بن جلول خالد، (2017): مطبوعة بداغوجية في رياضيات المؤسسة، قالمة، الجزائر.
8. بني هاني جهاد صباح، الملكاوي نازم محمود والحوري فاتح عبد القادر، (2009): بحوث العمليات والأساليب الكمية، دار جليس الزمان للنشر والتوزيع: عمان، الأردن.
9. رضوان أحمد علي أحمد و سليمان عبد الرحمن محمد، (2001): تقنيات الأمثلية في البرمجة غير الخطية، النشر العلمي والمطابع لجامعة الملك سعود، الرياض، السعودية.
10. طه حمدي، حسين أحمد حسين على وأحمد محمد على محمد، (2011): مقدمة في بحوث العمليات، دار المريخ للنشر: الرياض، السعودية.
11. عوض مراد كمال، (2009): الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية، دار البداية، الطبعة الأولى: عمان، الأردن.
12. فتيحة بلجيلالي (2018): رياضيات المؤسسة، مطبوعة بيداغوجية، كلية العلوم الاقتصادية التجارية وعلوم التسيير، جامعة ابن خلدون، تيارت.
13. مرجان سليمان محمد، (2002): بحوث العمليات، الجامعة المفتوحة، الطبعة الأولى: طرابلس، ليبيا.
14. مخوخ رزيقة، (2019): رياضيات المؤسسة 02، مطبوعة لقسم العلوم التجارية، جامعة محمد بوضياف، المسيلة.

ثانيا: باللغة الأجنبية

1- Belloufi abde rahim, (2008): Optimisation du processus d'usinage à l'aide de la programmation non linéaire (P.N.L), mémoire magistère, université mohammed khidre :biskra.